Déroulement d'une colle :

• Au début de colle, une question de cours sera systématiquement posée : **Tout énoncé de proposition ou définition doit être particulièrement PRÉCIS.**
Ce sera soit une définition, soit propriété soulignée, ou une formule encadrée dont les hypothèses précises permettant de l'utiliser doivent être connues. Quelques **[preuves]** signalées en crochet gras colorié sont exigibles.
• Vous passez ensuite aux exercices.

ch. XI : Equations différentielles, systèmes différentiels

— Rappels de PCSI : EDL1, EDL2 à coefficients constants.

— **Système différentiel linéaire** (à coefficients constants, sans second membre) : $X' = A\ X$

Résolution dans le **cas diagonal** $Z' = D\ Z$, puis dans le **cas diagonalisable**, en posant $A = PDP^{-1}$ et $Z = P^{-1}X$

Ecriture des solutions réelles à l'aide des parties réelles et imaginaires des solutions complexes.

— Système différentiel linéaire (à coefficients continus) : $X' = A(t)X + B(t)$
Problème de Cauchy

$$\boxed{(\mathcal{PC})\left\{\begin{array}{lcll} X'(t) & = & A(t)\ X(t) + B(t) & (\mathcal{E}) \\ X(t_0) & = & X_0 & (\mathcal{CI}) \end{array}\right.}$$

Théorème de Cauchy-Lipschitz linéaire (admis, preuve H.P.). principe de superposition.

— Résolution explicite d'un problème de Cauchy avec A constante et $B(t) = 0$: écriture de l'unique solution dans le cas linéaire diagonal, ou dans le cas **diagonalisable**.
Cas de Système différentiel linéaire trigonalisable à coefficients constants $X' = AX$, avec A trigonalisable (sans second membre).

— **Structure de $\mathbb{K}$-e.v. de dimension 2** de l'ensemble des solutions des équations différentielles linéaires d'ordre 2 à coefficients continus, de la forme :
$(E)\quad a(t)y'' + b(t)y' + c(t) = d(t)$,
avec a, b, c, d continues sur I et $a(t) \neq 0,\ \forall t \in I$
(N.B. pour les colleurs : la méthode de Lagrange pour en déterminer explicitement une base est Hors Programme)

ch. XII : Isométries des espaces euclidiens

1) Rappels de PCSI

Norme, **produit scalaire**, dans un espace euclidien. Inégalité de Cauchy-Schwarz. Norme associée à un produit scalaire.

Base orthonormée et **formules de calcul** des normes et produits scalaires à l'aide des décompositions dans une telle base.

Algorithme de Gram-Schmidt. **Théorème de projection** sur un sous-espace vectoriel de dimension finie, formule du projeté orthogonal sur un s.e.v. muni d'une b.o.n. . Inégalité de Bessel. Distance à un s.e.v. . Orthogonal d'un s.e.v.. Sous-espaces vectoriels orthogonaux, somme directe orthogonale $\boxed{F \oplus^{\perp} F^{\perp} = E}$.

2) Isométries en dimension n

— **Isométrie vectorielle**. Notation $\mathcal{O}(E) = \{u \in \mathcal{L}(E)\ ;\ \forall x \in E,\ \|u(x)\| = \|x\|\}$.
[si $u \in \mathcal{L}(E)$ est une isométrie de l'espace euclidien $(E, \|\ \|)$, alors u est un automorphisme] **[preuve]**

[si $u \in \mathcal{L}(E)$ est une isométrie, alors u est inversible et u^{-1} est une isométrie.] **[preuve]**

Conservation du produit scalaire par une isométrie. **[preuve]**
Image d'une (de toute) base orthonormale par une isométrie.
Stabilité de l'orthogonal d'un s.e.v. stable par une isométrie.

— **Réflexion** dans un espace euclidien. Ecriture matricielle de la réflexion par rapport à F dans une base adaptée à la somme directe $E = F \oplus^{\perp} F^{\perp}$:

$$\boxed{Mat_{\mathcal{B}}(s_F) = \begin{pmatrix} I_{n-1} & 0_{n-1,1} \\ 0_{1,n-1} & -1 \end{pmatrix}}$$

— Matrice orthogonale, inverse. On appelle indifféremment **isométrie** ou **automorphisme orthogonal** les éléments de $O(E)$, l'ensemble des endomorphismes qui conservent la norme.
Un endomorphisme $u \in \mathcal{L}(E)$ est une **isométrie ssi sa matrice dans une base orthonormée** est orthogonale.

— **Groupe orthogonal** $(\mathcal{O}_n(\mathbb{R}), \times)$: ensemble non vide, stable par produit et passage à l'inverse. Déterminant d'une matrice orthogonale.
Groupe spécial orthogonal $(\mathcal{SO}_n(\mathbb{R}), \times)$: ensemble non vide, stable par produit et passage à l'inverse.