Corrigé du devoir de mathématiques 4

Exercice 1. Calcul d'une somme de coefficients binomiaux

1. Questions de cours.
   (a) Cours !
   (b) Cours !
   (c) Cours !
2. Soit $(n,p) \in \mathbb{N}^2$ avec $n \geq p$.
   On se propose de déterminer $\displaystyle\sum_{k=p}^{n} \binom{k}{p}$.
   (a) La formule de Pascal entraîne que pour tout entier k compris entre $p+1$ et n :
   $$\binom{k}{p} + \binom{k}{p+1} = \binom{k+1}{p+1}.$$
   Par conséquent, pour tout entier $k \in [\![p+1; n]\!]$:
   $$\binom{k}{p} = \binom{k+1}{p+1} - \binom{k}{p+1}.$$
   Sachant que $\binom{p}{p} = 1$, on obtient :
   $$\sum_{k=p}^{n} \binom{k}{p} = 1 + \sum_{k=p+1}^{n} \left[\binom{k+1}{p+1} - \binom{k}{p+1}\right].$$
   (b) On remarque que la somme $\displaystyle\sum_{k=p+1}^{n} \left[\binom{k+1}{p+1} - \binom{k}{p+1}\right]$ est télescopique. Par conséquent :
   $$\sum_{k=p+1}^{n} \left[\binom{k+1}{p+1} - \binom{k}{p+1}\right] = \binom{n+1}{p+1} - \binom{p+1}{p+1} = \binom{n+1}{p+1} - 1.$$
   On en déduit finalement que
   $$\boxed{\sum_{k=p}^{n} \binom{k}{p} = \binom{n+1}{p+1}.}$$

Exercice 2. Une somme double

1. Soit $(n,q) \in \mathbb{N} \times \mathbb{C}$.
   - Rappelons que si $q = 1$, alors $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} q^k = \left(\sum_{k=0}^{n} 1\right) = n+1$.
   - Rappelons enfin que si $q \neq 1$, alors
   $$\sum_{k=0}^{n} q^k = \frac{q^{n+1}-1}{q-1}.$$
   Cette dernière formule s'obtient par exemple à l'aide de la formule
   $$(q-1)\left(\sum_{k=0}^{n} q^k\right) = q^{n+1} - 1.$$

Celle-ci s'obtient en remarquant que

$$(q-1)\left(\sum_{k=0}^{n} q^k\right) = \sum_{k=0}^{n}\left(q^{k+1}-q^k\right)$$

et que cette dernière somme est télescopique.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $q \in \mathbb{C}$ avec $q \neq 1$. On se propose de déterminer $S_n(q) = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} k\, q^{k-1}$.

2. On remarque que pour tout entier $k \in [\![1;n]\!]$:

$$\sum_{j=1}^{k} q^{k-1} = q^{k-1}\left(\sum_{j=1}^{k} 1\right) = k\, q^{k-1}.$$

D'où :

$$\sum_{k=1}^{n}\left(\sum_{j=1}^{k} q^{k-1}\right) = \sum_{k=1}^{n} k\, q^{k-1}.$$

Ce qui établit le résultat demandé :

$$S_n(q) = \sum_{k=1}^{n} k\, q^{k-1}.$$

3. L'échange des symboles σ dans la somme double entraîne :

$$\sum_{k=1}^{n}\left(\sum_{j=1}^{k} q^{k-1}\right) = \sum_{j=1}^{n}\left(\sum_{k=j}^{n} q^{k-1}\right).$$

Or pour tout entier $j \in [\![1;n]\!]$:

$$\sum_{k=j}^{n} q^{k-1} \overset{k'=k-1}{=} \sum_{k'=j-1}^{n-1} q^{k'} = \frac{q^n - q^{j-1}}{q-1},$$

la somme en jeu étant la somme des termes consécutifs d'une suite géométrique de raison q. Mais alors :

$$\boxed{\sum_{k=1}^{n}\left(\sum_{j=1}^{k} q^{k-1}\right) = \sum_{j=1}^{n} \frac{q^n - q^{j-1}}{q-1}.}$$

4. D'après ce qui précède

$$S_n(q) = \sum_{j=1}^{n} \frac{q^n - q^{j-1}}{q-1}.$$

Par linéarité, on obtient :

$$S_n(q) = \frac{q^n}{q-1}\left(\sum_{j=1}^{n} 1\right) - \frac{1}{q-1}\left(\sum_{j=1}^{n} q^{j-1}\right).$$

On en déduit immédiatement que

$$\boxed{S_n(q) = n\,\frac{q^n}{q-1} - \frac{q^n-1}{(q-1)^2} = \frac{n\,q^{n+1} - (n+1)\,q^n + 1}{(q-1)^2}}.$$

5. On remarque que $S_n(1) = \left(\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k\right) = \dfrac{n\,(n+1)}{2}$. On renvoie au cours pour une démonstration de ce résultat.

Exercice 3. Une équation différentielle linéaire d'ordre 1

On considère l'équation différentielle suivante :

$$(E) \quad (x^2+1)y' - xy = \sqrt{x^2+1}.$$

1. • La fonction $x \mapsto x^2+1$ est définie sur $\mathbb{R}$ et ne s'annule pas sur $\mathbb{R}$. Par conséquent l'équation différentielle a pour forme résolue
$$(E) \quad y' - \frac{x}{x^2+1}\, y = \frac{1}{\sqrt{x^2+1}}.$$
On va donc pouvoir résoudre l'équation différentielle sur l'intervalle $I = \mathbb{R}$.
   • L'équation différentielle homogène associée est
$$(E_0) \quad y' - \frac{x}{x^2+1}\, y = 0.$$
Sachant que $x \mapsto \frac{x}{x^2+1}$ admet $x \mapsto \ln(\sqrt{x^2+1})$ comme primitive sur $\mathbb{R}$, on en déduit que l'ensemble S_0 des solutions sur $\mathbb{R}$ de l'équation différentielle homogène associée est :
$$\boxed{S_0 = \left\{\mathbb{R} \to \mathbb{R}\ ;\ x \mapsto \lambda\, \sqrt{1+x^2} \mid \lambda \in \mathbb{R}\right\}.}$$
   • On cherche dans un premier temps une solution particulière y_0 sous la forme $y_0 \ :\ x \mapsto \lambda(x)\, \sqrt{x^2+1}$ où $\lambda \ :\ \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est une fonction inconnue définie et dérivable sur $\mathbb{R}$. Une fonction y_0 écrite sous cette forme est solution de l'équation différentielle (E) si et seulement si
$$\forall x \in \mathbb{R},\ \lambda'(x) = \frac{1}{x^2+1}.$$
Or $x \mapsto \frac{1}{x^2+1}$ admet arctan comme primitive sur $\mathbb{R}$. Il en découle que $y_0 \ :\ x \mapsto \arctan(x)\, \sqrt{x^2+1}$ est une solution particulière de (E).
On en déduit que l'ensemble S des solutions de (E) sur $\mathbb{R}$ est :
$$\boxed{S = \left\{\mathbb{R} \to \mathbb{R}\ ;\ x \mapsto (\lambda + \arctan(x))\ \sqrt{1+x^2} \mid \lambda \in \mathbb{R}\right\}.}$$

2. La fonction cherchée s'écrit sous la forme $y \ :\ x \mapsto (\lambda + \arctan(x))\ \sqrt{1+x^2}$ avec $\lambda \in \mathbb{R}$. Mais $y(0) = 0 \Leftrightarrow \lambda = 0$. Il s'agit donc de la fonction suivante :
$$\boxed{y \ :\ x \mapsto \arctan(x)\, \sqrt{x^2+1}.}$$

Exercice 4. Une équation différentielle linéaire d'ordre 2

On considère l'équation différentielle définie suivante :

$$(E) \quad y'' + 4y = 8\cos^2(t).$$

1. • L'équation différentielle homogème associée est
$$(L_0) \quad y'' + 4y = 0.$$
Son équation caractéristique $r^2 + 4 = 0$ a pour racines $r_1 = -2\,i$ et $r_2 = 2\,i$ Par conséquent, l'ensemble S_0 des solutions sur $\mathbb{R}$ de (E_0) est :
$$\boxed{S_0 = \left\{\mathbb{R} \to \mathbb{R}\ ;\ t \mapsto \alpha\, \cos(2t) + \beta\, \sin(2t) \mid (\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2\right\}.}$$
   • $\forall t \in \mathbb{R},\ \cos^2(t) = \frac{\cos(2t)+1}{2}.$

- On cherche $y_1 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ et $y_2 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ des solutions particulières de :

$$(E_1)\ y'' + 4\,y = 4 \text{ et } (E_2)\ y'' + 4\,y = 4\,\cos(2t) \text{ respectivement.}$$

  Le principe de superposition entraîne que $y_1 + y_2$ est solution de (E).
  $\hookrightarrow$ *Recherche* de y_1. On cherche y_1 sous la forme $y_1(t) = C$ avec $C \in \mathbb{R}$. En injectant dans l'équation différentielle (E_1), on trouve $4\,C = 4$ soit $C = 1$. Par conséquent, la solution particulière $y_1 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de (E_1) trouvée est :

$$\boxed{y_1 \ : \ t \mapsto 1.}$$

  $\hookrightarrow$ *Recherche* de y_2. On cherche au préalable $\underline{Y_2} : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ une solution particulière de :

$$(L_2)_{\mathbb{C}} \qquad \underline{Y}'' + 4\,\underline{Y} = 4\,e^{i\,2t}.$$

  Puisque $r = 2\,i$ est solution de l'équation caractéristique, on cherche $\underline{Y_2}$ sous la forme $\underline{Y_2} = A\,t\,e^{2\,i\,t}$ avec $A \in \mathbb{C}$.
  On a : $\underline{Y_2}''(t) = (4i\,A - 4\,A\,t)\,e^{2i\,t}$ pour tout $t \in \mathbb{R}$.
  Par conséquent $\underline{Y_2}$ est solution de $(E_2)_{\mathbb{C}}$ si et seulement si $4\,i\,A = 4$ si et seulement si $A = -i$. La solution particulière de $(E_2)_{\mathbb{C}}$ trouvée est donc

$$\underline{Y_2} \ : \ t \mapsto -i\,t\,e^{2\,i\,t}.$$

  La partie réelle de $\underline{Y_2}$ étant une solution particulière de (E_2), la solution particulière $y_2 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de (E_2) trouvée est :

$$\boxed{y_2 \ : \ t \mapsto t\,\sin(2t).}$$

  Ainsi la solution particulière de (E) est :

$$\boxed{y_0 \ : \ t \mapsto 1 + t\,\sin(2t).}$$

- L'ensemble S des solutions de (E) sur $\mathbb{R}$ est donc

$$\boxed{S = \left\{\mathbb{R} \to \mathbb{R}\ ;\ t \mapsto 1 + t\,\sin(2t) + \alpha\,\cos(2t) + \beta\,\sin(2t) \mid (\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2\right\}.}$$

2. Compte-ten de ce qui précède la solution cherchée s'écrit sous la forme

$$y \ : \ t \mapsto 1 + t\,\sin(2\,t) + \alpha\,\cos(2\,t) + \beta\,\sin(2\,t).$$

   Par conséquent, pour tout réel t :

$$y'(t) = \sin(2\,t) + 2\,t\,\cos(2\,t) - 2\,\alpha\,\sin(2\,t) + 2\,\beta\,\cos(2\,t).$$

   Les conditions initiales imposées sont alors équivalentes à

$$\begin{cases} \alpha &= -1 \\ \beta &= 0 \end{cases}$$

   Par conséquent, l'unique solution de (E) vérifiant $y(0) = y'(0) = 0$ est la fonction

$$\boxed{t \mapsto 1 + t\,\sin(2\,t) - \cos(2\,t).}$$

Problème 1. Quelques propriétés des coefficients binomiaux

L'objectif du problème est d'étudier certaines propriétés remarquables des coefficients binomiaux.

Questions de cours

1. Cours !
2. Cours !

Un encadrement du coefficient binomial $\binom{2n}{n}$

Dans cette partie, on se propose d'établir que pour tout entier naturel n :

$$\frac{4^n}{2\,n+1} \leq \binom{2n}{n} \leq 4^n.$$

Pour cela, on pose pour entier naturel n :

$$I_n = \int_0^1 t^n\,(1-t)^n\,dt.$$

3. D'après la formule du binôme de Newton,

$$2^{2n} = (1+1)^{2n} = \sum_{k=0}^{2n} \binom{2n}{k}.$$

Par conséquent :

$$\boxed{\sum_{k=0}^{2n} \binom{2n}{k} = 4^n}$$

On remarque que $\binom{2n}{n}$ est le terme d'indice n de la somme précédente et chaque terme de la somme est positif. Il en découle immédiatement que

$$\boxed{\binom{2n}{n} \leq 4^n.}$$

4. (a) On peut remarquer que la fonction $t \mapsto t(1-t)$ atteint sa valeur maximale sur $\mathbb{R}$ en $t = \dfrac{1}{2}$ et que cette valeur maximale est égale à $\dfrac{1}{4}$. On en déduit immédiatement que :

$$\forall t \in [0;1],\ 0 \leq t\,(1-t) \leq \frac{1}{4}.$$

(b) La fonction $x \mapsto x^n$ étant croissante sur $\mathbb{R}_+$, on tire de la question précédente que :

$$\forall t \in [0;1], t^n\,(1-t)^n \leq \frac{1}{4^n}.$$

D'où

$$I_n \leq \int_0^1 \frac{dt}{4^n} = \frac{1}{4^n}.$$

5. (a) Posons pour tout entier $k \in [\![0;n]\!]$

$$\mathrm{P(k)} \text{ « } I_n = \frac{(n!)^2}{(n-k)!\,(n+k)!} \textstyle\int_0^1 t^{n-k}\,(1-t)^{n+k}\,dt \text{ »}$$

Montrons que $P(k)$ est vraie pour tout entier $k \in [\![0;n]\!]$ à l'aide d'une récurrence finie.

- *Initialisation.* Pour $k = 0$:

$$\frac{(n!)^2}{(n-k)!\,(n+k)!} \int_0^1 t^{n-k}\,(1-t)^{n+k}\,dt = \int_0^1 t^n\,(1_t)^n\,dt = I_n.$$

La propriété $P(0)$ est donc vraie.

- *Hérédité.* Soit $k \in [\![0;n-1]\!]$ un entier tel que $P(k)$ est vraie. Montrons qu'alors $P(k+1)$ est vraie. Par hypothèse de récurrence :

$$I_n = \frac{(n!)^2}{(n-k)!\,(n+k)!} \int_0^1 t^{n-k}\,(1-t)^{n+k}\,dt.$$

À l'aide d'une intégration par parties, on obtient :

$$\int_0^1 t^{n-k}\,(1-t)^{n+k}\,dt = \left[-t^{n-k}\,\frac{(1-t)^{n+k+1}}{n+k+1}\right]_{t=0}^{t=1} + \frac{n-k}{n+k+1}\int_0^1 t^{n-(k+1)}\,(1-t)^{n+k+1}\,dt.$$

Or $n-k \geq 1$ puisque $k \leq n-1$. Le terme entre crochets s'annule donc en $t=0$ et en $t=1$. Par conséquent :

$$\begin{aligned} I_n &= \frac{(n!)^2}{(n-k)!\,(n+k)!}\,\frac{n-k}{n+k+1}\int_0^1 t^{n-(k+1)}\,(1-t)^{n+k+1}\,dt \\ &= \frac{(n!)^2}{(n-(k+1))!\,(n+k+1)!}\int_0^1 t^{n-(k+1)}\,(1-t)^{n+k+1}\,dt \end{aligned}$$

(b) L'égalité précédente pour $k=n$ conduit à :

$$I_n = \frac{(n!)^2}{(2n)!}\int_0^1 (1-t)^{2n}\,dt.$$

Or

$$\int_0^1 (1-t)^{2n}\,dt = \left[-\frac{(1-t)^{2n+1}}{2\,n+1}\right]_{t=0}^{t=1} = \frac{1}{2\,n+1}.$$

Par conséquent :

$$\boxed{I_n = \frac{1}{(2\,n+1)\binom{2n}{n}}.}$$

Or d'après la question 4 (b) :

$$\frac{1}{(2\,n+1)\binom{2n}{n}} \leq \frac{1}{4^n}.$$

Ce qui donne l'inégalité :

$$\frac{4^n}{2n+1} \leq \binom{2n}{n}.$$

Une expression du coefficient binomial $\binom{2n}{n}$

Dans cette partie, on se propose d'établir que pour tout entier naturel n :

$$\binom{2n}{n} = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}^2$$

À cette fin, on considère les fonctions polynomiales $f_n\ :\ x \mapsto (1+x)^{2n}$ et $g_n\ :\ x \mapsto (1+x)^n$.

6. *Remarques préliminaires.*

(a) Par symétrie :

$$\forall k \in [\![0;n]\!],\ \binom{n}{n-k} = \binom{n}{k}.$$

D'où :

$$\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\binom{n}{k} = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\binom{n}{n-k}.$$

(b) Par application de la formule du binôme de Newton, on obtient :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ f_n(x) = \sum_{k=0}^{2n}\binom{2n}{k}x^k.$$

$$\forall x \in \mathbb{R},\ g_n(x) = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}x^k.$$

Le terme de degré n de la fonction f_n est égal à $\binom{2n}{n}\,x^n$. Ainsi le coefficient de degré n de f_n est égal à $\binom{2n}{n}$.

7. *Développement de deux fonctions polynomiales de degré n.*
Soient $(a_k)_{0\leq k\leq n}$ et $(b_\ell)_{0\leq \ell\leq n}$ deux familles de réels. On souhaite établir que pour tout réel x :

$$\left(\sum_{k=0}^{n} a_k\, x^k\right)\left(\sum_{\ell=0}^{n} b_\ell\, x^\ell\right) = \sum_{i=0}^{2n}\left(\sum_{k=\max(i-n,0)}^{\min(n,i)} a_k\, b_{i-k}\right) x^i.$$

   (a) En développant le produit, on obtient :

$$\left(\sum_{k=0}^{n} a_k\, x^k\right)\left(\sum_{\ell=0}^{n} b_\ell\, x^\ell\right) = \sum_{k=0}^{n}\left(\sum_{\ell=0}^{n} a_k\, b_\ell\, x^{k+\ell}\right).$$

   Le changement d'indice $i=k+\ell$ dans la somme intérieure donne :

$$\left(\sum_{k=0}^{n} a_k\, x^k\right)\left(\sum_{\ell=0}^{n} b_\ell\, x^\ell\right) = \sum_{k=0}^{n}\left(\sum_{i=k}^{n+k} a_k\, b_{i-k}\, x^{i}\right).$$

   (b) Il s'agit d'échanger les symboles σ de la somme double obtenue à la question précédente. La somme en jeu est une somme de la forme $\displaystyle\sum_{k=0}^{n}\left(\sum_{i=k}^{k+n} u_{k,i}\right)$. Comme suggéré, on doit ranger les termes de la somme double dans un tableau à $n+1$ lignes (l'indice k décrivant l'intervalle entier $[\![0;n]\!]$) et $2n+1$ lignes puisque les valeurs atteintes par l'indice i sont dans l'intervalle entier $[\![0;2n]\!]$:

	$i=0$		$i=k$		$i=n$		$i=k+n$		$i=2n$
$k=0$	$u_{0,0}$	$\cdots$	$u_{0,k}$	$\cdots$	$u_{0,n}$				
$\vdots$		$\ddots$				$\ddots$			
k			$u_{k,k}$	$\cdots$	$u_{k,n}$	$\cdots$	$u_{k,k+n}$		
$\vdots$				$\ddots$				$\ddots$	
$k=n$					$u_{n,n}$	$\cdots$	$u_{n,k+n}$	$\cdots$	$u_{n,n}$

   Au vu du tableau ci-dessus :

$$\sum_{k=0}^{n}\left(\sum_{i=k}^{k+n} u_{k,i}\right) = \sum_{i=0}^{n}\left(\sum_{k=0}^{i} u_{k,i}\right) + \sum_{i=n+1}^{2n}\left(\sum_{k=n-i}^{2n} u_{k,i}\right).$$

   Par ailleurs, on remarque que

$$\max(i-n,0) = \begin{cases} 0 \text{ si } i\leq n \\ i-n \text{ si } i>n+1\end{cases} \quad ; \quad \min(i,n) = \begin{cases} i \text{ si } i\leq n \\ n \text{ si } i>n+1\end{cases}$$

   D'où :

$$\boxed{\sum_{k=0}^{n}\left(\sum_{i=k}^{k+n} u_{k,i}\right) = \sum_{i=0}^{2n}\left(\sum_{k=\max(i-n,0)}^{\min(i,n)} u_{k,i}\right).}$$

   Le résultat obtenu appliqué au produit $\left(\sum_{k=0}^{n} a_k\, x^k\right)\left(\sum_{\ell=0}^{n} b_\ell\, x^\ell\right)$ conduit à :

$$\left(\sum_{k=0}^{n} a_k\, x^k\right)\left(\sum_{\ell=0}^{n} b_\ell\, x^\ell\right) = \sum_{i=0}^{2n}\left(\sum_{k=\max(i-n,0)}^{\min(n,i)} a_k\, b_{i-k}\right) x^i.$$

8. En appliquant la formule précédente, on obtient :

$$g_n(x)\times g_n(x) = \sum_{i=0}^{2n}\left(\sum_{k=\max(i-n,0)}^{\min(n,i)} \binom{n}{k}\binom{n}{i-k}\right) x^i.$$

9. D'après la question 6 (b), le coefficient de degré n de f_n est égal à $\binom{2n}{n}$. Or la question précédente entraîne que le coefficient de degré n de f_n est égal à
$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}\binom{n}{n-k}.$$
Par conséquent :
$$\binom{2n}{n} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}^2,$$
compte-tenu de la question 6 (a).

Problème 2. Sommes de complexes

Dans ce problème on désigne par $\mathbb{U}$ l'ensemble des nombres complexes de module 1 et pour tout entier $n \geq 1$, par $\mathbb{U}_n$ l'ensemble des racines n-ièmes de l'unité.

Pour tout entier $n \geq 1$ et tout $z \in \mathbb{C}$, on considère la somme
$$S_n(z) = 1 + z + z^2 + \ldots + z^{n-1} = \sum_{k=0}^{n-1} z^k$$
avec la convention $S_1(z) = 1$.

Les questions qui suivent sont à peu près indépendantes.

Problème 1 : sommes de complexes

Remarque préliminaire : $S_n(z)$ est la somme des termes d'une suite géométrique de raison z :
$$\boxed{S_n(z) = \begin{cases} \dfrac{1-z^n}{1-z} & \text{si } z \neq 1 \\ n & \text{si } z = 1 \end{cases}}$$

1. **Questions de cours**. cf. cours!!!
2. **Le cas** $n = 3$.
   (a) Il s'agit donc de résoudre l'équation de degré 2 : $z^2 + z + (1-i) = 0$.
   Le discriminant est $\Delta = -3 + 4i$. Ses racines carrées sont $1 + 2i$ et $-1 - 2i$. Nous trouvons les deux solutions de l'équations :
   $$\boxed{z_1 = i \text{ et } z_2 = -1 - i}$$
   (b) $S_3(z) \in \mathbb{R}$ si et seulement si
   $$\begin{array}{lll} & S_3(z) & = & \overline{S_3(z)} \\ \Leftrightarrow & z + z^2 & = & \bar{z} + \bar{z}^2 \\ \Leftrightarrow & z^2 - \bar{z}^2 & = & \bar{z} - z \\ \Leftrightarrow & (z - \bar{z})(z + \bar{z}) & = & \bar{z} - z \end{array}$$
   Donc $S_3(z) \in \mathbb{R}$ si et seulement si $z - \bar{z} = 0$ ou $z + \bar{z} = -1$ ou encore :
   $$\boxed{z \in \mathbb{R} \text{ ou } \Re(z) = -\frac{1}{2}}$$
3. **Majoration du module de la somme**.

(a) Soit $z \in \mathbb{U}$. Pour tout entier $n \geq 1$, notons $(P_n) \Leftrightarrow |S_n(z)| \leq n$.
Puisque $S_1(z) = 1$ la propriété (P_1) est vraie.
Supposons que (P_n) est vraie pour un certain entier n et montrons (P_{n+1}). Nous avons $S_{n+1}(z) = S_n(z) + z^n$ donc d'après l'inégalité triangulaire :

$$|S_{n+1}(z)| = |S_n(z) + z^n| \leq |S_n(z)| + |z^n|$$

Mais $z \in \mathbb{U}$ donc $|z^n| = 1$ et $|S_n(z)| \leq n$ par hypothèse de récurrence.
Ainsi $|S_{n+1}(z)| \leq n + 1$ et (P_{n+1}) est démontrée.
Nous avons donc démontré par récurrence sur n que (P_n) est vraie pour tout entier $n \geq 1$.

(b) $S_n(1) = n$ donc la borne est atteinte.

4. Dans cette question, on pose $z = e^{i\frac{\pi}{n}}$ et $n \geq 2$.

(a) $z \in \mathbb{U}_N$ avec $N = 2n$.

(b) Comme $z \neq 1$ et $z^n = -1$ nous avons

$$S_n(z) = \frac{1 - z^n}{1 - z} = \frac{2}{1 - z}.$$

(c) Utilisons la méthode de "l'angle moitié" :

$$1 - e^{i\frac{\pi}{n}} = e^{i\frac{\pi}{2n}} \left(e^{-i\frac{\pi}{2n}} - e^{i\frac{\pi}{2n}}\right) = -2ie^{i\frac{\pi}{2n}} \sin\left(\frac{\pi}{2n}\right)$$

Ainsi $S_n(z) = \sin\left(\frac{\pi}{2n}\right) e^{-i\frac{\pi(3n+1)}{2n}}$ et comme $\sin\left(\frac{\pi}{2n}\right) > 0$ il vient :

$$\begin{cases} |S_n(z)| = \sin\left(\frac{\pi}{2n}\right) \\ \arg S_n(z) = -\frac{\pi(3n+1)}{2n} \ (2\pi) \end{cases}$$

5. Dans cette question, on suppose que $n \geq 3$ et $z \in \mathbb{U}_{n-2} \setminus \{1\}$.

(a) Nous avons $z^n = z^{n-2}.z^2 = z^2$ et comme $z \neq 1$:

$$S_n(z) = \frac{1 - z^2}{1 - z} = 1 + z$$

.

(b) Remarquons d'abord que $S_(-1) = 0$. Supposons que $z \neq -1$; encore une fois, la stratégie de l'angle moitié fonctionne.
On trouve $\boxed{\arg S_n(z) = \frac{\arg(z)}{2} \ (2\pi)}$.

Soit $\theta \in \mathbb{R}$ une valeur de l'argument de z avec $\theta \in]-\pi, \pi[$. Nous trouvons alors $\boxed{|S_n(z)| = 2\cos\left(\frac{\theta}{2}\right)}$.

6. Dans cette dernière question on détermine l'ensemble noté $\mathcal{S}_1$ des $z \in \mathbb{U}$ tels que $|S_n(z)| = 1$.

(a) Si $z \in (\mathbb{U}_{n-1} \cup \mathbb{U}_{n+1}) \setminus \{1\}$ alors $z^n = z$ ou $z^n = \dfrac{1}{z}$. Nous trouvons ainsi pour $S_n(z) = \dfrac{1 - z^n}{1 - z}$ les valeurs 1 ou $-\dfrac{1}{z}$ qui sont toujours de module 1 lorsque z est de module 1.

(b) Soit $z \in \mathbb{U}$ tel que $|S_n(z)| = 1$. Dans ce cas $z \neq 1$ et $|\frac{z^n-1}{z-1}| = 1$ donc $|z^n - 1| = |z - 1|$. En développant l'identité $|z^n - 1|^2 = |z - 1|^2$ sous la forme $(z^n - 1)\overline{(z^n - 1)} = (z - 1)\overline{(z - 1)}$ il vient :

$$\boxed{z^n + \bar{z}^n = z + \bar{z}}$$

(c) Soit $z \in \mathcal{S}_1$. Alors il existe $\theta \in \mathbb{R}$ tel que $z = e^{i\theta}$. Nous avons les égalité : $z^n + \bar{z}^n = 2\cos(n\theta)$ et $z + \bar{z} = 2\cos(\theta)$.
Ainsi d'après la question précédente : $\cos(n\theta) = \cos(\theta)$ donc :

$$n\theta = \theta + 2k\pi \text{ avec } k \in \mathbb{Z} \text{ ou } n\theta = -\theta + 2k'\pi \text{ avec } k' \in \mathbb{Z}$$

ou encore
$$\theta = 2k\frac{\pi}{n-1} \text{ avec } k \in \mathbb{Z} \text{ ou } \theta = 2k' frac\pi n + 1 \text{ avec } k' \in \mathbb{Z}$$
On peut donc écrire l'égalité :
$$\boxed{\mathcal{S}_1 = (\mathbb{U}_{n-1} \cup \mathbb{U}_{n+1}) \setminus \{1\}}$$
Une solution géométrique :

Soit $z \in \mathbb{U}$ tel que $|S_n(z)| = 1$. Reprenons à l'égalité $|z^n - 1| = |z - 1|$.

Un point d'affixe $m \in \mathbb{U}$ est sur le cercle de centre 0 et de rayon 1 ainsi que sur le cercle de centre 1 et de rayon $|m - 1|$ (puisque $|m - 1| = |m - 1|$). Il y a exactement deux points qui satisfont ces conditions : ceux d'affixe m et son conjugué $\bar{m}$.

Revenons à notre problème. Puisque $|z^n| = 1$ et $|z^n - 1| = |z - 1|$, le point d'affixe z^n est sur le cercle de centre 0 et de rayon 1 ainsi que sur le cercle de centre 1 et de rayon $|z - 1|$. Il y a donc deux possibilités :
$$z^n = z \text{ ou } z^n = \bar{z}$$
On retrouve donc $z \in \mathbb{U}_{n-1}$ ou $z \in \mathbb{U}_{n+1}$.