Exercice 1 : Questions de cours
Les questions suivantes sont indépendantes.

1. Écrire / simplifier les équations de Maxwell dans les cas suivants :
   (a) Cas général.
   (b) Dans le vide (pas de charges ni de courants).
   (c) En régime stationnaire.
   (d) Dans l'approximation des régimes stationnaires (ARQS « magnétique »).
2. Parmi les équations de Maxwell, quelle est celle qui est reliée au phénomène d'induction électromagnétique ?
3. Donner les expressions du vecteur de Poynting et de la densité d'énergie électromagnétique.
4. Établir l'équation de propagation du champ magnétique $\overrightarrow{B}$ dans le vide. Préciser l'expression de la célérité qui y apparaît.

Équations de Maxwell ; aspects énergétiques

Exercice 2 : Étude d'un champ électromagnétique
Un champ électrique a pour composantes cartésiennes dans une région vide de charges et de courants :

$$\overrightarrow{E} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ E_0 \mathrm{e}^{\alpha t - \beta x} \end{pmatrix}.$$

1. Calculer la divergence et le rotationnel de ce champ électrique.
2. En déduire, à l'aide de l'équation de Maxwell-Faraday, les composantes du champ magnétique $\overrightarrow{B}$ (on suppose qu'il n'existe aucun champ stationnaire). Vérifier que le champ ainsi trouvé est bien solution de l'équation de Maxwell-Flux.
3. Les champs électrique et magnétique doivent également sa tisfaire l'équation de Maxwell-Ampère. Quelle doit forcément être la relation entre α et β pour que cela soit le cas ?

Exercice 3 : Bilan énergétique de la charge d'un condensateur
Les armatures d'un condensateur plan, constituées de deux disques conducteurs, de surface $S = \pi a^2$ et de rayon a, de même axe Oz et séparées d'une distance e sont reliées (voir figure a) à un générateur de fém $\mathcal{E}$ par une résistance R.

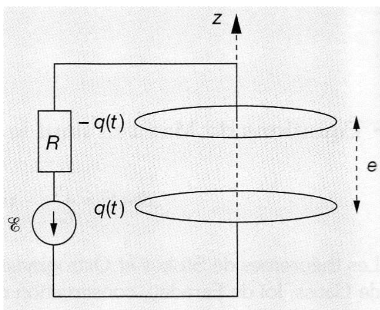


Figure a

Initialement le condensateur est déchargé. À un instant quelconque où la tension à ses bornes vaut $V(t)$, ses armatures portent respectivement les charges $q(t) = CV(t)$ et $-q(t)$ où $C = \epsilon_0 S/e$ est la capacité du condensateur. On néglige les effets de bords, de telle sorte qu'en coordonnées cylindriques le champ électromagnétique dans le condensateur soit en *première approximation* de la forme :

$$\overrightarrow{E} = E(t)\overrightarrow{u_z} \ \ ; \ \ \overrightarrow{B} = B(r,t)\overrightarrow{u_\theta}$$

et le champ électrique est nul à l'extérieur du condensateur.

1. En utilisant les lois de l'électrocinétique, déterminer $V(t)$ et montrer que le condensateur reçoit au cours de l'opération une énergie $U_c = \frac{1}{2}C\mathcal{E}^2$.
2. À un instant quelconque, déterminer $E(t)$ en utilisant le théorème de Gauss sur la surface (σ) représentée en pointillés sur la figure b et $B(r,t)$ en appliquant le théorème d'Ampère généralisé au contour (C) représenté en pointillés sur la figure c (cercle de rayon $r < a$ et d'axe Oz).

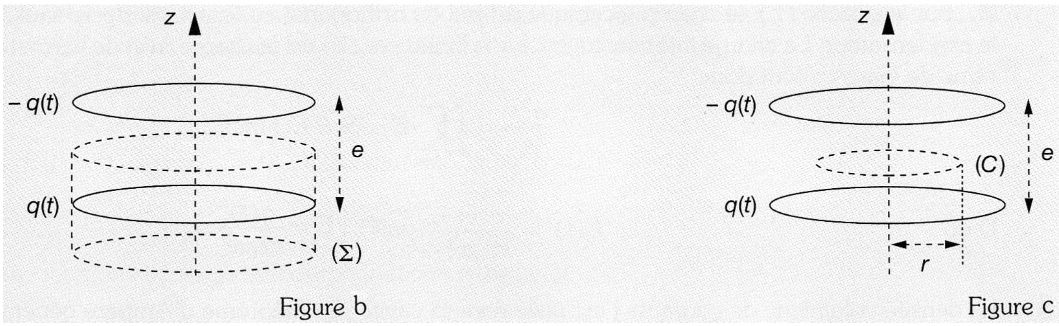


Figure b Figure c

3. (∗) En déduire la puissance électromagnétique reçue par l'intérieur du condensateur, puis l'énergie électromagnétique U_{em} emmagasinée par le condensateur au cours de sa charge. Comparer avec l'énergie U_c déterminée à la question 1.
4. Retrouver U_{em} en utilisant la densité d'énergie électromagnétique u_{em} dans l'état initial et dans l'état final.
5. En appliquant la loi de Faraday au contour rectangulaire (C) représenté en pointillés sur la figure d, montrer que les champs déterminés à la question 2 ne peuvent convenir que si $\ddot{q}(t) = 0$.

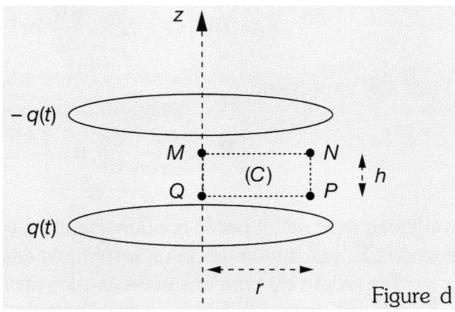


Figure d

ARQS

Exercice 4 : Validité de l'ARQS
Préciser, en le justifiant, si l'ARQS est valable dans les situations suivantes :
- Réseau électrique de 1000 km, avec signaux électriques de fréquence 50 Hz (fréquence du secteur).

- Étude de micro-ondes (de longueur d'onde 3 mm) dans un guide d'onde (de longueur 1 m).
- Filtrage d'un signal en TP d'électrocinétique. Choisir des valeurs crédibles pour répondre à la question.

Exercice 5 : Courant électrique et courant de déplacement
On se place dans un milieu ohmique de conductivité γ ($\overrightarrow{j} = \gamma \overrightarrow{E}$), en régime sinusoïdal forcé de fréquence ν.

1. Montrer que $||\overrightarrow{j}|| > ||\overrightarrow{j}_{\mathrm{d}}||$ à condition que $\nu < \nu_{\max}$. Exprimer $\nu_{\max}$ en fonction de $\epsilon_0 = 8,8.10^{-12}$ SI et γ.
2. Application numérique :
   (a) dans le cas du cuivre ($\gamma = 5,8.10^{7}$ S.m^{-1}) ;
   (b) dans le cas de l'eau ($\gamma = 1,0.10^{-9}$ S.m^{-1}).

Problème n°1 : Principe d'une pince ampèremétrique
En refermant une pince ampèremétrique sur un conducteur, on peut mesurer des courants qui vont de 2 A à plus de 600 A, sans raccordement électrique.
Fonctionnement : un conducteur parcouru par un courant crée un champ magnétique autour de lui. Ce champ magnétique induit une tension dans la bobine que constitue la pince. Cette tension, proportionnelle à la valeur du courant traversant le conducteur, est lue directement sur l'ampèremètre.
Attention : les pinces ampèremétriques ne fonctionnent que pour le courant alternatif !

Estimer le nombre de spires N qu'il y a dans une pince ampèremétrique.

Aide, uniquement si vous êtes bloqué(e)s :
- estimer le champ magnétique $\overrightarrow{B}(t)$ créé par le fil conducteur dans tout l'espace, dans le cadre de l'ARQS, quand celui-ci est parcouru par un courant $I(t) = I_m \cos(\omega t)$;
- considérer que la pince ampèremétrique est constituée d'une bobine torique de N spires (faire un schéma) ;
- estimer le flux de $\overrightarrow{B}(t)$ à travers toutes les spires ;
- en déduire la fem induite dans la bobine ;
- puis son nombre de spires.

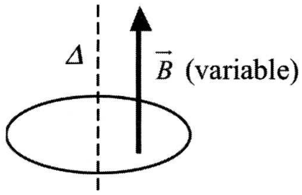
Induction électromagnétique

Les exercices suivants constituent principalement des révisions de la partie *induction* du programme de PCSI. L'apport du programme de PC est la mise en évidence de l'équation de Maxwell-Faraday qui gouverne ce phénomène.

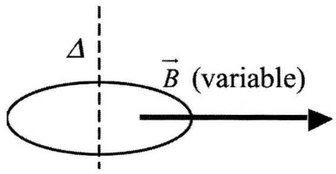
Exercice 6 : Calculs de courants induits
Dans chacun des six cas suivants une spire conductrice de résistance R et d'axe Δ est plongée dans un champ magnétique $\overrightarrow{B}$, avec $||\overrightarrow{B}|| = B_0$ dans le cas où $\overrightarrow{B}$ est constant, et $||\overrightarrow{B}|| = B_m \cos(\omega t)$ dans le cas où $\overrightarrow{B}$ est variable. Pour chaque situation :

1. Déterminer l'expression de la force électromotrice induite dans la spire.
2. À l'aide d'un schéma électrique équivalent, en déduire l'expression du courant induit dans la spire.
3. Calculer finalement la valeur efficace de ce courant.

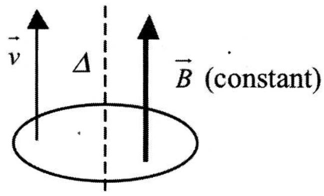
Données : surface délimitée par la spire : 10 cm^2 ; résistance de la spire : $0,5\ \Omega$.



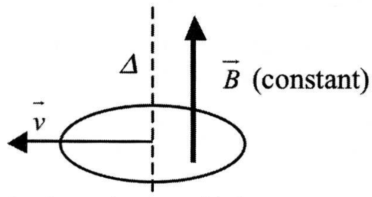
Cas 1 : la spire est immobile dans un champ magnétique uniforme parallèle à son axe, d'amplitude $0{,}1\,\mathrm{T}$ et de fréquence $50\,\mathrm{Hz}$.



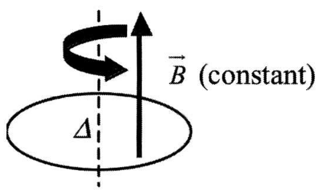
Cas 2 : la spire est immobile dans un champ magnétique uniforme orthogonal à son axe, d'amplitude $0{,}1\,\mathrm{T}$ et de fréquence $50\,\mathrm{Hz}$.



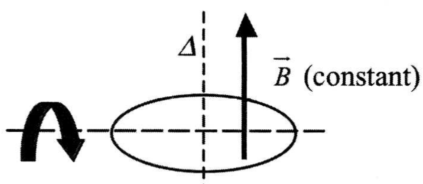
Cas 3 : la spire se déplace sans changer d'orientation avec une vitesse de $2\,\mathrm{m\cdot s^{-1}}$ parallèle à son axe dans un champ magnétique constant et uniforme de $0{,}1\,\mathrm{T}$.



Cas 4 : la spire se déplace sans changer d'orientation avec une vitesse $2\,\mathrm{m\cdot s^{-1}}$ orthogonale à son axe dans un champ magnétique constant et uniforme de $0{,}1\,\mathrm{T}$.



Cas 5 : la spire tourne avec une vitesse angulaire de $5\,\mathrm{rad\cdot s^{-1}}$ autour de son axe dans un champ magnétique constant et uniforme parallèle à son axe de $0{,}1\,\mathrm{T}$.



Cas 6 : la spire tourne avec une vitesse angulaire de $5\,\mathrm{rad\cdot s^{-1}}$ autour d'un de ses diamètres dans un champ magnétique constant et uniforme parallèle à son axe de $0{,}1\,\mathrm{T}$.

Exercice 7 : Rails de Laplace
À l'extrémité de rails de Laplace, dont on néglige la résistance électrique, est connecté un générateur de

tension de fém E et de résistance interne R. Un interrupteur K permet de débrancher ce dipôle. On néglige l'inductance propre du circuit et les frottements de la tige sur les rails. On note B le champ magnétique perpendiculaire au plan formé par les rails et la tige, l la distance entre les rails et m la masse de la tige. À l'instant initial $t = 0$, la tige de résistance R est immobile. On ferme alors l'interrupteur K.

1. Établir le système d'équations électrique et mécanique faisant intervenir la vitesse v et l'intensité i.
2. En déduire une équation différentielle régissant l'évolution de la vitesse. La résoudre.
3. Dresser un bilan de puissance. Quelle est la conversion réalisée par ce dispositif ?

Problème n°2 : (∗) Freinage électromagnétique

Un cadre carré de masse m et de côté a assimilé à une résistance R se déplace dans le champ de pesanteur $\overrightarrow{g} = g\overrightarrow{u_z}$ dans une zone de l'espace où le champ magnétique est stationnaire avec $\overrightarrow{B}(z < 0) = \overrightarrow{0}$ et $\overrightarrow{B}(z > 0) = B\overrightarrow{u_y}$ avec B constant. À l'instant $t = 0$ on l'abandonne sans vitesse initiale au moment où il va entrer dans la zone où $\overrightarrow{B} \neq \overrightarrow{0}$. *Étudier son mouvement.*