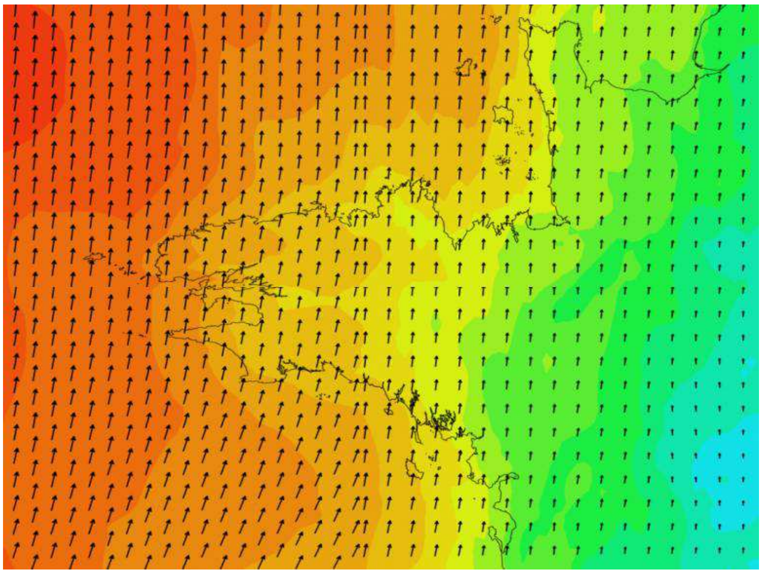
Documents

Document 1 : Exemple de vision eulérienne d'un écoulement

La carte ci-dessous est une carte météorologique donnant la vitesse du vent (proportionnelle à la taille de la flèche) à un instant *donné*, en plusieurs points de l'espace. On a donc affaire ici à une vision eulérienne de l'écoulement des masses atmosphériques.



Document 2 : Expression de l'opérateur $\left(\vec{v}.\overrightarrow{\text{grad}}\right)$

- **Opérateur scalaire**. Soit $\vec{v}$ un champ vectoriel dont *chacune* des coordonnées dépend a priori de la position et du temps : $v_x = v_x(x,y,z,t)$; $v_y = v_y(x,y,z,t)$; $v_z = v_z(x,y,z,t)$ en coordonnées cartésiennes. Et soit f un champ scalaire : $f = f(x,y,z,t)$. Dans ce cas, l'opérateur $\left(\vec{v}.\overrightarrow{\text{grad}}\right)$ appliqué au champ scalaire f s'écrit :

$$\boxed{\left(\vec{v}.\overrightarrow{\text{grad}}\right) f = \left(v_x\frac{\partial}{\partial x} + v_y\frac{\partial}{\partial y} + v_z\frac{\partial}{\partial z}\right) f = v_x\frac{\partial f}{\partial x} + v_y\frac{\partial f}{\partial y} + v_z\frac{\partial f}{\partial z}}$$

- **Opérateur vectoriel**. L'opérateur $\left(\vec{v}.\overrightarrow{\text{grad}}\right)$ peut également être appliqué à un champ vectoriel quelconque $\vec{b}$. Dans ce cas on obtient un champ vectoriel, le champ $\left(\vec{v}.\overrightarrow{\text{grad}}\right)\vec{b}$. Pour calculer ce champ résultant, il « suffit » d'appliquer l'opérateur scalaire $\left(\vec{v}.\overrightarrow{\text{grad}}\right)$ à chacune des coordonnées b_x, b_y et b_z de $\vec{b}$. Au final, cela donne 9 termes ! Il faut donc se méfier, il s'agit d'une source importante d'erreurs en mécanique des fluides.

$$\left(\vec{v}.\overrightarrow{\text{grad}}\right)\vec{b} = \left[\left(\vec{v}.\overrightarrow{\text{grad}}\right)b_x\right]\vec{u_x} + \left[\left(\vec{v}.\overrightarrow{\text{grad}}\right)b_y\right]\vec{u_y} + \left[\left(\vec{v}.\overrightarrow{\text{grad}}\right)b_z\right]\vec{u_z}$$

$$\left(\vec{v}.\overrightarrow{\text{grad}}\right)\vec{b} = \begin{pmatrix} v_x\dfrac{\partial b_x}{\partial x} + v_y\dfrac{\partial b_x}{\partial y} + v_z\dfrac{\partial b_x}{\partial z} \\ v_x\dfrac{\partial b_y}{\partial x} + v_y\dfrac{\partial b_y}{\partial y} + v_z\dfrac{\partial b_y}{\partial z} \\ v_x\dfrac{\partial b_z}{\partial x} + v_y\dfrac{\partial b_z}{\partial y} + v_z\dfrac{\partial b_z}{\partial z} \end{pmatrix}$$

Document 3 : Circulation d'un champ de vecteur sur un contour

Soit $\overrightarrow{b}$ un champ vectoriel, et Γ un chemin curviligne partant du point A pour aller au point B. On appelle circulation de $\overrightarrow{b}$ entre A et B le long de Γ l'intégrale curviligne :

$$\mathcal{C} = \int_A^B \overrightarrow{b}.\overrightarrow{\mathrm{d}l}$$

Document 4 : L'opérateur rotationnel ($\overrightarrow{\mathrm{rot}}$)

L'opérateur rotationnel est un opérateur d'analyse vectorielle qui prend comme objet un champ vectoriel $\overrightarrow{b}$ et donne en image un champ vectoriel : $\overrightarrow{b} \rightarrow \overrightarrow{\mathrm{rot}}(\overrightarrow{b})$. On en donne ci-dessous une définition intrinsèque (indépendante du système de coordonnées) :

Soit $\overrightarrow{b}$ un champ vectoriel, $\mathrm{d}\Gamma$ un contour élémentaire fermé autour du point M, $\overrightarrow{\mathrm{d}S} = \mathrm{d}S\overrightarrow{n}$ le vecteur surface élémentaire associé à ce contour, et $\mathrm{d}\mathcal{C}$ la circulation de $\overrightarrow{b}(M)$ le long de ce contour. Alors la composante selon $\overrightarrow{n}$ du rotationnel de $\overrightarrow{b}$, noté $\overrightarrow{\mathrm{rot}}(\overrightarrow{b})$ est :

$$\left(\overrightarrow{\mathrm{rot}}(\overrightarrow{b})\right).\overrightarrow{n} = \lim_{\mathrm{d}S\to 0}\left(\frac{\mathrm{d}\mathcal{C}(M)}{\mathrm{d}S}\right)$$

ou encore, au premier ordre en $\mathrm{d}S$,

$$\mathrm{d}\mathcal{C}(M) = \left(\overrightarrow{\mathrm{rot}}(\overrightarrow{b})\right).\overrightarrow{n}\,\mathrm{d}S$$

Document 5 : Expressions du rotationnel dans les différents systèmes de coordonnées

Soit $\overrightarrow{b}$ un champ vectoriel dont *chacune* des coordonnées dépend a priori de la position et du temps : $b_x = b_x(x,y,z,t)$; $b_y = b_y(x,y,z,t)$; $b_z = b_z(x,y,z,t)$ en coordonnées cartésiennes par exemple ; ou bien $b_r = b_r(r,\theta,\phi,t)$; $b_\theta = b_\theta(r,\theta,\phi,t)$; $b_\phi = b_\phi(r,\theta,\phi,t)$ en coordonnées sphériques... On montre alors à partir de la définition du document précédent que :

$$\text{Coordonnées cartésiennes : } \overrightarrow{\mathrm{rot}}\left(\overrightarrow{b}\right) = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial b_z}{\partial y} - \dfrac{\partial b_y}{\partial z} \\ \dfrac{\partial b_x}{\partial z} - \dfrac{\partial b_z}{\partial x} \\ \dfrac{\partial b_y}{\partial x} - \dfrac{\partial b_x}{\partial y} \end{pmatrix}$$

$$\text{Coordonnées cylindriques : } \overrightarrow{\mathrm{rot}}\left(\overrightarrow{b}\right) = \begin{pmatrix} \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial b_z}{\partial \theta} - \dfrac{\partial b_\theta}{\partial z} \\ \dfrac{\partial b_r}{\partial z} - \dfrac{\partial b_z}{\partial r} \\ \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial (r b_\theta)}{\partial r} - \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial b_r}{\partial \theta} \end{pmatrix}$$

$$\text{Coordonnées sphériques : } \overrightarrow{\mathrm{rot}}\left(\overrightarrow{b}\right) = \begin{pmatrix} \dfrac{1}{r\sin\theta}\dfrac{\partial (\sin\theta b_\phi)}{\partial \theta} - \dfrac{1}{r\sin\theta}\dfrac{\partial b_\theta}{\partial \phi} \\ \dfrac{1}{r\sin\theta}\dfrac{\partial b_r}{\partial \phi} - \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial (r b_\phi)}{\partial r} \\ \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial (r b_\theta)}{\partial r} - \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial b_r}{\partial \theta} \end{pmatrix}$$

Document 6 : Théorème de Stokes

Le théorème suivant fait le lien entre circulation et rotationnel, mais de manière intégrale.

Théorème de Stokes : soit $\overrightarrow{b}(M)$ un champ vectoriel défini dans tout l'espace. Soit (Γ) un contour fermé orienté sur lequel s'appuie une surface (S), elle-même orientée grâce à la règle du pouce de la main droite. Alors la circulation de $\overrightarrow{b}$ le long de Γ est égale au flux de $\overrightarrow{b}$ à travers la surface (S) :

$$\int_{(\Gamma)} \overrightarrow{b}.\overrightarrow{\mathrm{d}l} = \iint_{(S)} \overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\overrightarrow{b}.\overrightarrow{\mathrm{d}S}$$

Document 7 : Interprétation du rotationnel

Voir l'excellente vidéo de la chaîne Youtube *3Blue1Brown* intitulée "Divergence and curl : The language of Maxwell's equations, fluid flow, and more" :

`https://www.youtube.com/watch?v=rB83DpBJQsE`

La vidéo est en anglais, mais il est possible d'afficher des sous-titres (en anglais). À regarder de 7:50 à 9:20 pour ce qui concerne la notion de rotationnel (*curl* en anglais), puis de 14:14 à 16:56 pour une compréhension plus profonde des opérateur divergence et rotationnel (*dot product* signifie produit scalaire, et *cross product* produit vectoriel).

Document 8 : L'opérateur nabla

On appelle nabla l'opérateur symbolique défini exclusivement en coordonnées cartésiennes :

$$\overrightarrow{\nabla} = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial}{\partial x} \\ \dfrac{\partial}{\partial y} \\ \dfrac{\partial}{\partial z} \end{pmatrix}$$

L'opérateur nabla permet d'exprimer en coordonnées cartésiennes exclusivement tous les opérateurs de l'analyse vectorielle à l'aide d'opérations simples :

$$\overrightarrow{\mathrm{grad}} f = \overrightarrow{\nabla} f$$

$$\mathrm{div}\,\overrightarrow{b} = \overrightarrow{\nabla}.\overrightarrow{b}$$

$$\overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\overrightarrow{b} = \overrightarrow{\nabla} \wedge \overrightarrow{b}$$