Exercice 1 :

Voir cours.

Exercice 2

a) On a

$$2\pi f = 2765 \text{ donc } f = 440 \text{ Hz}$$

C'est un LA.

b) L'amplitude de l'onde de pression est $P_1 = 10$ Pa donc $P \in [101290, 101310]$.

c) La relation de dispersion donne

$$2765 = 8,131 \cdot c \text{ donc } c = \frac{2765}{8,131} = 340 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$$

En utilisant la célérité du son dans un gaz parfait

$$c = \sqrt{\frac{\gamma R T_0}{M}} \text{ donc } T_0 = \frac{Mc^2}{\gamma R} = 288 \text{ K}$$

La loi des gaz parfaits donne

$$P_0 M = \mu_0 R T_0 \text{ donc } \mu_0 = \frac{P_0 M}{R T_0} = 1,226 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$$

La célérité vaut aussi

$$c = \frac{1}{\sqrt{\mu_0 \chi_S}} \text{ donc } \chi_S = \frac{1}{\mu_0 c^2} = 7,06 \cdot 10^{-6} \text{ Pa}^{-1}$$

On vérifie la relation obtenue à l'exercice 16.16

$$\chi_S = \frac{1}{\gamma P_0}$$

d) D'après la relation de dispersion

$$\lambda = \frac{c}{f} = 0,773 \text{ m}$$

e) La relation linéarisée

$$\mu_0 \frac{\partial \vec{v}_1}{\partial t} = -\overrightarrow{\text{grad}}\, p_1$$

permet d'exprimer

$$v_1(x,t) = \frac{P_1 k}{\mu_0 \omega} \cos(\omega t - kx) = \frac{1}{\mu_0 c} P_1 \cos(\omega t - kx)$$

$$\text{soit } \vec{v}_1(x,t) = 0,0240 \cos(2765t - 8,131x)\,\vec{u}_x$$

L'onde de masse volumique est

$$\mu_1(x,t) = \mu_0 \chi_S\, p_1(x,t) = 8,656 \cdot 10^{-5} \cos(2765t - 8,131x)$$

f) L'accélération est la dérivée de la vitesse par rapport à t :

$$\vec{a}_1(x,t) = -66,4 \sin(2765t - 8,131x)\,\vec{u}_x$$

g) Par définition du vecteur de Poynting sonore

$$\vec{\Pi}_{son} = p_1 \vec{v}_1 = 0,240 \cos^2(2765t - 8,131x)\,\vec{u}_x$$

La puissance sonore est

$$\mathcal{P} = \vec{\Pi}_{son} \cdot S\,\vec{u}_x = 6,64 \cdot 10^{-3} \cos^2(2765t - 8,131x)$$

$$\text{donc } <\mathcal{P}> = 3,32 \text{ mW}$$

h) Par définition

$$I_{dB} = 10 \log \frac{<\|\vec{\Pi}\|>}{10^{-12}} = 111 \text{ dB}$$

i) Par définition :

$$u_{son} = \frac{1}{2}\chi_S p_1^2 + \frac{1}{2}\mu_0 \vec{v}_1^2 = 7,06 \cdot 10^{-4} \cos^2(2765t - 8,131x)$$

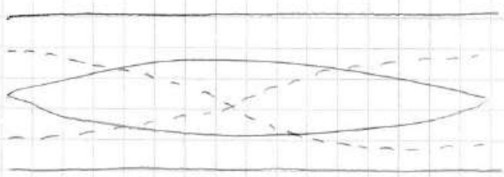
$$\text{et } <u_{son}> = 3,53 \cdot 10^{-4} \text{ J} \cdot \text{m}^{-3}$$

Exercice 3

1) ⓐ Aux extrémités, il n'est pas possible de comprimer la dernière tranche d'air car les particules de fluide sont libres de sortir. La pression y reste donc égale à P_0, et la surpression y est nulle (noeud de surpression)

ⓑ Le champ des vitesses a une amplitude maximale (ventres) aux extrémités.

ⓒ

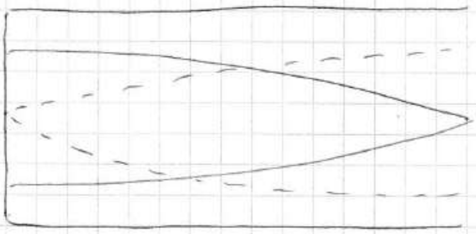


Légende : — : champ de surpression
--- : " " vitesse

2) (a) Paroi imperméable donc vitesse normale des particules de fluide nulle (nœud de vitesse)

(b) + ventre de pression à l'extrémité fermée
+ nœud de surpression et ventre de vitesse à l'extrémité ouverte (voir question 1)

(c)



Exercice 4

a) $u(x,t) = f(x).\sin\omega t$ satisfait l'équation de d'Alembert $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \dfrac{1}{c^2}\dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0$, ce qui conduit rapidement à $f''(x) + k^2 f(x) = 0$ en ayant posé $k = \omega / c$.
La solution $f(x) = u_0 \sin(kx + \varphi)$ doit satisfaire $u(x=0,t) = 0 \quad \forall t$ car le tuyau est fermé en $x = 0$ (nœud de vitesse), d'où $\varphi = 0$:

$$\boxed{u(x,t) = u_0 \sin kx.\sin\omega t}$$ où u_0 est l'amplitude de vitesse

b) L'onde étant stationnaire, il n'est pas possible d'utiliser $p = \pm\rho_0 c u$ (uniquement valable pour les ondes progressives), il faut revenir à l'équation d'Euler :

$$\rho_0 \frac{\partial u}{\partial t} = \rho_0 \omega u_0 \sin kx.\cos\omega t = -\frac{\partial p}{\partial x} \quad \Rightarrow \quad p(x,t) = \rho_0 \frac{\omega}{k} u_0 \cos kx.\cos\omega t + cste$$

il faut prendre $cste = 0$ afin que $< p > = 0$; par ailleurs $k = \omega / c$ d'où :

$$\boxed{p(x,t) = \rho_0 c\, u_0 \cos kx.\cos\omega t}$$

Rq : Par homogénéité l'amplitude de pression s'écrit bien $p_0 = \rho_0 c\, u_0$, mais il n'y a pas de relation simple entre les ondes stationnaires $p(x,t)$ et $u(x,t)$, les deux grandeurs étant en quadrature spatiale et temporelle l'une par rapport à l'autre.

La condition aux limites $p(x = L,t) = 0 \quad \forall t$ car le tuyau est ouvert en $x = L$ (nœud de pression) conduit à $\cos kL = 0$, une condition de quantification donnant $k_n L = (2n-1)\pi / 2$ (n entier ≥ 1), d'où les fréquences particulières pouvant être engendrées dans le tuyau $f_n = \omega_n / 2\pi = c k_n / 2\pi$:

$$\boxed{f_n = (2n-1)\frac{c}{4L}} \quad n \in \mathbb{N}^*$$

c) Alors $f_1 = \dfrac{c}{4L}$, $f_2 = 3\dfrac{c}{4L} = 3f_1$, $f_3 = 5f_1$ ...Les partiels émis par ce tuyau ne recouvrent que les harmoniques impairs ! (alors qu'un tuyau ouvert aux deux extrémités permet d'avoir tous les harmoniques).

AN : $\underline{f_1 = 147\ \text{Hz}}$, le Ré$_2$, et $\underline{f_2 = 440\ \text{Hz}}$, le La$_3$ du diapason, une quinte à l'octave supérieure du Ré$_2$, (voir la question **48.** du chapitre **1**).

Exercice 5

1. Le coefficient de transmission en énergie entre deux milieux d'impédance différentes s'écrit $\mathfrak{T} = \dfrac{4Z_aZ_m}{\left(Z_a + Z_m\right)^2}$. À l'interface air-muscle, on a $\mathfrak{T} = 10^{-3}$. Le coefficient de réflexion en énergie vaut $\mathfrak{R} = \dfrac{\left(Z_a - Z_m\right)^2}{\left(Z_a + Z_m\right)^2}$ d'où pour l'interface air-muscle $\boxed{\mathfrak{R} = 0{,}999}$.

On peut remarquer que peu d'énergie est transmise à l'interface air-muscle. Ainsi, sans gel, l'onde acoustique émise ne peut pas passer dans le corps du patient. Le gel doit donc avoir une impédance bien choisie pour permettre une bonne transmission, c'est ce que l'on va étudier.

✐ *On vérifie bien que $\mathfrak{R} + \mathfrak{T} = 1$: l'énergie est conservée.*

2. a) Pour des OPPH, la surpression et la vitesse sont liées par la relation $\underline{p} = Z\underline{v}$ pour des ondes se propageant dans le sens des x croissants (où Z désigne l'impédance acoustique du milieu considéré) et $\underline{p} = -Z\underline{v}$ pour des OPPH se propageant dans le sens des x décroissants. On peut alors écrire pour la surpression : $\underline{p}_1(x,t) = \underline{A}_a\ \underline{Z}_a \exp\left[j\left(\omega t - k_a x\right)\right]$,

$\underline{p}_2(x,t) = \underline{A}_g\ \underline{Z}_g \exp\left[j\left(\omega t - k_g x\right)\right] - \underline{B}_g\ \underline{Z}_g \exp\left[j\left(\omega t + k_g x\right)\right]$ et

$\underline{p}_3(x,t) = \underline{A}_m\ \underline{Z}_m \exp\left[j\left(\omega t - k_m x\right)\right]$.

b) Les interfaces sont imperméables, on a donc **continuité de la vitesse**. On peut écrire :

- en $x = 0$: $\underline{A}_a = \underline{A}_g + \underline{B}_g$ (a)
- en $x = e$: $\underline{A}_g \exp\left(-jk_g e\right) + \underline{B}_g \exp\left(jk_g e\right) = \underline{A}_m \exp\left(-jk_m e\right)$ (b)

De plus, les interfaces sont fixes ou sans masse, on a ainsi **continuité de la pression acoustique**, on en déduit :

- en $x = 0$: $\underline{A}_a\ Z_a = Z_g\left(\underline{A}_g - \underline{B}_g\right)$ (c)
- en $x = e$: $\underline{A}_g\ Z_g \exp\left(-jk_g e\right) - \underline{B}_g\ Z_g \exp\left(jk_g e\right) = \underline{A}_m\ Z_m \exp\left(-jk_m e\right)$ (d)

Des relations (a) et (c) on déduit que $\left(Z_a - Z_g\right)\underline{A}_g + \left(Z_a + Z_g\right)\underline{B}_g = 0$ (1) et des relations (b) et (d) on déduit que $\left(Z_g - Z_m\right)\exp\left(-jk_g e\right)\underline{A}_g - \left(Z_m + Z_g\right)\exp\left(jk_g e\right)\underline{B}_g = 0$ (2).

c) Les relations (1) et (2) forment un système homogène de deux équations à deux inconnues ($\underline{A}_g$ et $\underline{B}_g$) qui admet une solution non nulle si et seulement si son déterminant est nul, d'où $\left(Z_g - Z_a\right)\left(Z_g + Z_m\right)\exp\left(jk_g e\right) = \left(Z_g + Z_a\right)\left(Z_g - Z_m\right)\exp\left(-jk_g e\right)$.

Finalement on peut écrire $\boxed{\dfrac{\left(Z_g - Z_a\right)\left(Z_g + Z_m\right)}{\left(Z_g + Z_a\right)\left(Z_g - Z_m\right)} = \exp\left(-2jk_g e\right)}$.

d) Le terme de gauche de cette équation est réel, le terme de droite doit donc également être réel. Considérons les deux situations possibles :

– dans le cas où $\exp\left(-2jk_g e\right)=1$, on a $Z_a = Z_m$ ce qui n'est pas possible (d'après les données de l'énoncé) ;

– on doit donc avoir $\exp\left(-2jk_g e\right)=-1$ ainsi l'impédance du gel vérifie $Z_g = \sqrt{Z_a\, Z_m}$ et l'épaisseur e doit être telle que $2k_g\, e = \pi + 2n\pi$ ($n \in \mathbb{N}$), soit $\boxed{e = \dfrac{\pi}{2k_g} + \dfrac{n\pi}{k_g},\ n \in \mathbb{N}}$.

Exercice 6

1. a) Partons de l'expression du Laplacien $\Delta p = \dfrac{1}{r^2}\dfrac{\partial}{\partial r}\left(r^2 \dfrac{\partial p}{\partial r}\right)$, on peut écrire $\Delta p = \dfrac{1}{r^2}\left(2r\dfrac{\partial p}{\partial r}\right) + \dfrac{1}{r^2}\left(r^2\dfrac{\partial^2 p}{\partial r^2}\right) = \dfrac{2}{r}\dfrac{\partial p}{\partial r} + \dfrac{\partial^2 p}{\partial r^2}$, et partant de $\dfrac{1}{r}\dfrac{\partial^2(r\,p)}{\partial r^2}$, il vient $\dfrac{1}{r}\dfrac{\partial}{\partial r}\left(p + r\dfrac{\partial p}{\partial r}\right) = \dfrac{2}{r}\dfrac{\partial p}{\partial r} + \dfrac{\partial^2 p}{\partial r^2}$, d'où finalement $\boxed{\Delta p = \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial^2(r\,p)}{\partial r^2}}$.

L'équation de d'Alembert tridimensionnelle à symétrie sphérique s'écrit $\dfrac{1}{r}\dfrac{\partial^2(r\,p)}{\partial r^2} = \dfrac{1}{c^2}\dfrac{\partial^2 p}{\partial t^2}$, d'où en multipliant par r on obtient $\boxed{\dfrac{\partial^2(r\,p)}{\partial r^2} - \dfrac{1}{c^2}\dfrac{\partial^2(r\,p)}{\partial t^2} = 0}$.

b) $r\,p$ est solution d'une équation de d'Alembert unidimensionnelle pour la variable r, la solution de cette équation est donc de la forme $r\,p(r,t) = f(r-ct) + g(r+ct)$ soit encore $\boxed{p(r,t) = \dfrac{1}{r}f(r-ct) + \dfrac{1}{r}g(r+ct)}$. Cette solution est la superposition d'une onde sphérique divergente amortie se propageant dans le sens des r croissants à la célérité c : $\dfrac{1}{r}f(r-ct)$ et d'une onde sphérique convergente se propageant dans le sens des r décroissants à la célérité c : $\dfrac{1}{r}g(r+ct)$.

2. a) L'équation hydrodynamique linéarisée s'écrit $\mu_0 \dfrac{\partial \vec{v_1}}{\partial t} = -\vec{\nabla} p_1$.

Ici, l'onde considérée n'est pas une OPP, la relation $p_1 = Z\,v_1$ n'est donc pas valable alors que l'équation hydrodynamique est toujours vérifiée.

Le problème est à symétrie sphérique, et la source sonore émet radialement des ondes, ainsi le champ des vitesses est de la forme $\vec{v_1} = v_1 \vec{e_r}$, on peut écrire en projection sur $\vec{e_r}$,

$j\omega\mu_0\,\underline{v}_1 = -\dfrac{\partial \underline{p}_1}{\partial r} = -A\left(-\dfrac{1}{r^2} - \dfrac{ik}{r}\right)\exp\left[j(\omega t - kr)\right]$, on a donc :

$$\boxed{\underline{v}_1(r,t) = \frac{A}{j\omega\mu_0 r^2}\exp\left[j(\omega t - kr)\right] + \frac{Ak}{\mu_0\,\omega r}\exp\left[j(\omega t - kr)\right]}.$$

Le premier terme est qualifié de champ proche car il décroît en $1/r^2$, alors que le second terme est qualifié de champ lointain car son rayon d'action est plus large, en effet, il décroît en $1/r$.

b) Le vecteur densité de flux de puissance sonore s'écrit $\vec{\Pi} = p_1\, v_1\, \vec{e_r}$.

On peut alors écrire $\langle\vec{\Pi}\rangle = \dfrac{1}{2}\mathrm{Re}\left\{\underline{p}_1 \cdot \underline{v}_1^*\right\}\vec{e_r}$. Avec les expressions de $\underline{p}_1$ et $\underline{v}_1$ déterminées précédemment, on a $\boxed{\langle\vec{\Pi}\rangle = \dfrac{k A^2}{2\mu_0\,\omega r^2}\vec{e_r}}$.

3. a) La continuité de la vitesse à la surface de la sphère pulsante nous permet d'écrire $\frac{\partial}{\partial t}\left(r_m \exp(j\omega t)\right) = \underline{v}_1(r_0, t)$, soit $j\omega r_m \exp(j\omega t) = \frac{A}{j\omega}\left(\frac{1}{r_0^{\,2}} + \frac{ik}{r_0}\right)\exp\left[j\left(\omega t - k r_0\right)\right]$, d'où, compte tenu que $|k r_0| \ll |\omega t|$ et $\frac{1}{r_0^2} \gg \frac{k}{r_0}$, on peut écrire $r_m = -\frac{A}{\mu_0\,\omega^2 r_0^{\,2}}$, et finalement $\boxed{A = -r_m\,\mu_0\,\omega^2\,r_0^{\,2}}$.

b) L'intensité acoustique s'écrit $L_{dB} = 10\log\left(\frac{\langle\Pi\rangle}{\langle\Pi_0\rangle}\right)$ où $\langle\Pi_0\rangle$ est une intensité de référence. En explicitant $\langle\Pi\rangle$ avec la valeur obtenue à la question 2.b), on a $L_{dB} = 10\log\left(\frac{A^2}{2\langle\Pi_0\rangle\,\mu_0\,c\,r_0^{\,2}}\right)$, soit $\boxed{A = \left(2\langle\Pi_0\rangle\,\mu_0\,c\,r_0^2\,10^{\,L_{dB}/10}\right)^{1/2}}$. Numériquement $\boxed{A = 0{,}14\ \text{Pa}\cdot\text{m}}$, d'où $\boxed{r_m = -1{,}1\ \text{mm}}$.

c) La puissance acoustique moyenne qui traverse une sphère de rayon r s'écrit $P_m = \iint_{sphere} \langle\vec{\Pi}\rangle\cdot \mathrm{d}\vec{S}$ où $\mathrm{d}\vec{S} = r^2\sin\theta\,\mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}\varphi\,\vec{e_r}$ et où le vecteur $\langle\vec{\Pi}\rangle$ a été déterminé à la question 2.b). On peut écrire $P_m = \int_0^{\pi}\int_0^{2\pi} \frac{r_m^{\,2}\,\omega^4\,r_0^{\,4}\,\mu_0}{2cr^2}\, r^2\sin\theta\,\mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}\varphi$. Finalement, on a $P_m = \frac{2\pi}{c} r_m^{\,2}\,\omega^4\,r_0^{\,4}\,\mu_0$.

Ainsi on peut exprimer r_m tel que $\boxed{r_m = \left(\frac{P_m\,c}{2\pi^2}\omega^4\,r_0^{\,4}\,\mu_0\right)^{1/2}}$.

d) Pour une puissance P_m et une valeur de r_m fixée, on a $r_0\,\omega = C^{te}$. Ainsi, pour des sons graves ω est petit, il faut r_0 grand et un grand haut-parleur est donc nécessaire. Inversement, pour des sons aigus, ω est grand, d'où r_0 peut être petit : on a des petits haut-parleurs.

Exercice 7

Dans le cas où la section du tuyau est lentement variable, on considère que la vitesse du fluide reste parallèle à l'axe du pavillon et que la surpression p et la masse volumique ρ sont constantes sur une section du tuyau : elles ne dépendent que des variables x et t.

1. Considérons un volume de fluide délimité par les plans x et $x + \mathrm{d}x$. À l'instant t, la masse de fluide contenue dans ce volume est $\mathrm{d}m = \rho(x,t)S(x)\mathrm{d}x$. Entre t et $t + \mathrm{d}t$:

- une masse de fluide δm_e entre dans ce volume en x : $\delta m_e = S(x)\rho(x,t)v(x,t)$;
- une masse de fluide δm_s sort de ce volume en $x + \mathrm{d}x$:

$\delta m_s = S(x+\mathrm{d}x)\rho(x+\mathrm{d}x,t)v(x+\mathrm{d}x,t)$.

La variation de masse dans le volume pendant dt est due à ces deux flux de masse entrante et sortante, la conservation de la masse permet donc d'écrire pendant l'intervalle de temps dt : $\mathrm{d}m = (\delta m_e - \delta m_s)\mathrm{d}t$, d'où $\frac{\mathrm{d}m}{\mathrm{d}t} = S(x)\rho(x,t)v(x,t) - S(x+\mathrm{d}x)\rho(x+\mathrm{d}x,t)v(x+\mathrm{d}x,t)$. En effectuant un développement de Taylor au premier ordre en dx, on obtient finalement $S(x)\frac{\partial\rho(x,t)}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial x}\left(S(x)\rho(x,t)v(x,t)\right)$, qui est **l'équation de conservation de la masse** dans un tuyau de section variable. De plus, dans le cadre de l'approximation acoustique, on peut linéariser cette équation en développant $\rho = \rho_0 + \mu(x,t)$, on a ainsi en ne gardant que les termes du premier ordre $\boxed{S(x)\frac{\partial\mu(x,t)}{\partial t} = -\rho_0\frac{\partial}{\partial x}\left(S(x)v(x,t)\right)}$ (1).

✐ *L'équation de conservation de la masse obtenue dans le cas d'un pavillon de section variable est différente du cas usuel (où le pavillon est de section variable), si on prend S(x) = S₀ = cst dans l'équation (1), on retrouve bien le cas classique.*

2. La définition du **coefficient de compressibilité isentropique** conduit à $\chi_s = \dfrac{1}{\rho_0}\left(\dfrac{\partial \mu}{\partial p}\right)_S$.

Dans le cadre de l'approximation acoustique, on a $\rho_0\,\chi_s\; p(x,t) = \mu(x,t)$ (2).

L'équation hydrodynamique ne fait pas intervenir la section du pavillon et reste donc inchangée par rapport au cas d'un pavillon de section constante, on a ainsi $\rho_0 \dfrac{\partial v(x,t)}{\partial t} = -\dfrac{\partial p(x,t)}{\partial x}$ (3). En remplaçant $\mu(x,t)$ dans l'équation (1) à l'aide de son expression donnée dans l'équation (2), on obtient $\rho_0\,\chi_S\, S(x)\dfrac{\partial p(x,t)}{\partial t} = -\rho_0 \dfrac{\partial}{\partial x}\big(S(x)\,v(x,t)\big)$. En dérivant cette expression par rapport à t, il vient $\rho_0\,\chi_S\, S(x)\dfrac{\partial^2 p(x,t)}{\partial t^2} = -\rho_0 \dfrac{\partial}{\partial x}\left(S(x)\dfrac{\partial v(x,t)}{\partial t}\right)$ puis en remplaçant $v(x,\, t)$ avec la relation (3), on a $\rho_0\,\chi_S\, S(x)\dfrac{\partial^2 p(x,t)}{\partial t^2} = \dfrac{\partial}{\partial x}\left(S(x)\dfrac{\partial p(x,t)}{\partial x}\right)$. Finalement, en posant $c = \dfrac{1}{\sqrt{\rho_0\,\chi_S}}$ la célérité du son dans le fluide, on obtient l'équation de propagation dans le pavillon relative à la pression $p(x,\, t)$ $\boxed{\dfrac{\partial^2 p(x,t)}{\partial x^2} + \dfrac{1}{S(x)}\dfrac{\mathrm{d}S(x)}{\mathrm{d}x}\dfrac{\partial p(x,t)}{\partial x} - \dfrac{1}{c^2}\dfrac{\partial^2 p(x,t)}{\partial t^2} = 0}$ (équation de Webster).

> ✐ *Dans le cas où la section du pavillon est constante $S(x) = C^{te}$, on retrouve l'équation de propagation de d'Alembert.*

3. Considérons le cas particulier d'un pavillon exponentiel $S(x) = S_0\, e^{mx}$, on a alors $\dfrac{1}{S(x)}\dfrac{\mathrm{d}S(x)}{\mathrm{d}x} = m$, l'équation précédente devient $\boxed{\dfrac{\partial^2 p(x,t)}{\partial x^2} + m\dfrac{\partial p(x,t)}{\partial x} - \dfrac{1}{c^2}\dfrac{\partial^2 p(x,t)}{\partial t^2} = 0}$.

4. On considère une OPPH de la forme $\boxed{\underline{p}(x,t) = \underline{p}_0 \exp\left[j\left(\underline{k}\,x - \omega t\right)\right]}$.

a) Injectons cette expression de $\underline{p}(x,t)$ dans l'équation de propagation ci-dessus, il vient après simplification $\underline{p}(x,t)$: $\boxed{\underline{k}^2 - j\,\underline{k}\,m - \dfrac{\omega^2}{c^2} = 0}$ qui est la relation de dispersion liant $\underline{k}$ et ω.

> ✐ *On peut déjà noter que la présence du terme complexe va induire un amortissement de l'onde lors de sa propagation.*

b) Cherchons le nombre d'onde sous la forme $k' + j\,k''$, on a :

$\left(k' + j\,k''\right)^2 - j\left(k' + j\,k''\right)m - \dfrac{\omega^2}{c^2} = 0$. En isolant partie réelle et partie imaginaire, on obtient les d'équations $k'^2 - k''^2 + m\,k'' - \dfrac{\omega^2}{c^2} = 0$ et $2k'k'' - m\,k' = 0$.

La seconde équation permet de mettre en évidence deux cas :

– si $k' = 0$, on a $k''^2 - m\,k'' + \dfrac{\omega^2}{c^2} = 0$ qui est une équation du second ordre en k'' admettant deux solutions. La partie réelle du vecteur d'onde étant nulle et la partie imaginaire non nulle, on a amortissement de l'onde sonore sans propagation ;

– si $k' \neq 0$, la seconde équation du système implique que $k'' = \dfrac{m}{2}$ et avec la première équation on obtient $k'^2 = \dfrac{\omega^2}{c^2} - \dfrac{m^2}{4}$. Pour avoir propagation il faut que $k'^2 > 0$, d'où l'existence d'une pulsation de coupure $\omega_c = \dfrac{m\,c}{2}$ telle que si $\omega > \omega_c$ on a propagation de l'onde.

c) La vitesse de phase de l'onde s'écrit $\boxed{V_\varphi = \dfrac{\omega}{|k'|} = \omega\left(\dfrac{\omega^2}{c^2} - \dfrac{m^2}{4}\right)^{-1/2}}$.

5. On veut pouvoir transmettre les sons de fréquence supérieure à $f_c = 500$ Hz dans un pavillon de la forme $S(x) = S_0 e^{mx}$. En prenant le logarithme de cette expression, on montre que m vérifie $m = \dfrac{\ln S(x_0) - \ln S(0)}{x_0}$, soit compte tenu que ω_c et m sont liées par la relation établie à la question 4.b), on a $\boxed{S(x_0) = S(0)\exp\left(\dfrac{2\,\omega_c\, x_0}{c}\right) = 5\,\mathrm{cm}}$.

Problème

En remarquant que l'impédance de l'eau est très supérieure à celle de l'air, on peut assimiler l'eau à une paroi rigide qui impose un nœud de vitesse. L'ouverture de la bouteille sur l'atmosphère impose un nœud de surpression et donc un ventre de vitesse. D'où $L = (2n+1)\lambda/4$ et $f = c/L$ pour le fondamental ; lorsque la bouteille se remplit, L diminue et le son devient plus aigu.