classes préparatoires scientifiques Lycée Brizeux

PSI
MATHEMATIQUES — **Feuille d'Exercices** $n°9$
Décembre 2024 — **Espaces Probabilisés**

Définition d'une probabilité et Premiers Calculs

Exercice 1. : Soit $(x_n)_n$ une suite de réels satisfaisant la relation de récurrence :

$$\forall n \in \mathbb{N}, 2x_{n+2} - 3x_{n+1} + x_n = 0$$

Soit Ω un ensemble dénombrable, noté $\Omega = \{\omega_n / n \in \mathbb{N}\}$.
Existe-t-il une probabilité sur $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega))$ telle que : $\forall n \in \mathbb{N}, x_n = P(\{\omega_n\})$?

Exercice 2. : Soit $a \in]0,1[$.

1. Démontrer qu'il existe une unique probabilité sur $\mathbb{N}$ telle que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\mathbb{P}(\{n\}) = (1-a)a^n$
2. On considère les deux événements : P : Obtenir un entier pair et I : Obtenir un entier impair. Calculer $\mathbb{P}(P)$ et $\mathbb{P}(I)$. Les évènements sont-ils incompatibles ? indépendants ?

Exercice 3. :Soit Ω un univers et soient A, B, C trois événements de Ω . Traduire en termes ensemblistes (en utilisant uniquement les symboles d'union, d'intersection et de passage au complémentaire, ainsi que A, B et C) les événements suivants :

1. Seul A se réalise.
2. A et B se réalisent, mais pas C.
3. les trois événements se réalisent.
4. au moins l'un des trois événements se réalise.
5. au moins deux des trois événements se réalisent.
6. aucun ne se réalise.
7. au plus l'un des trois se réalise
8. exactement deux des trois se réalisent

Exercice 4. On lance une pièce une infinité de fois. Pour $n \geq 1$, on note A_n l'événement « le n ième lancer amène pile »

1. Décrire par une phrase les événements suivants :

$$B = \bigcap_{i=5}^{+\infty} A_i, B = \bigcup_{i=5}^{+\infty} A_i$$

2. Ecrire à l'aide des A_i l'événement D : On n'obtient plus que des piles à partir d'un certain lancer.

Utiliser la Continuité Monotone

Exercice 5. On lance une pièce une infinité de fois. Pour $n \geq 1$, on note A_n l'événement : le n ième lancer amène pile.

1. Décrire en une phrase les événements suivants et calculer leur probabilité

$$B = \bigcap_{i=5}^{+\infty} A_i, C = \bigcup_{i=5}^{+\infty} A_i$$

2. Ecrire à l'aide de A_i l'événement D : On n'obtient plus que des piles à partir d'un certain lancer. Donner sa proba

Exercice 6. On lance indéfiniment une pièce équilibrée. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On note F_n : avoir face au n ième lancer.

1. Que traduit l'évènement $B_n = F_n \cap F_{n+1} \cap \overline{F_{n+2}}$? puis l'évènement $\bigcup_{n=1}^{+\infty} B_n$?
2. Pourquoi ne peut-on pas écrire $P(\bigcup_{n=1}^{+\infty} B_n) = \sum_{n=1}^{+\infty} P(B_n)$.
3. On pose $A_n = \bigcup_{i=1}^{n} B_i$.
   (a) Montrer que $A_n \cap B_{n+1} = A_{n-2} \cap B_{n+1}$.
   (b) Montrer que $P(A_{n+1}) - P(A_n) = \frac{1}{8}(1 - P(A_{n-2}))$. En déduire que $(P(A_n))_n$ converge vers 1.
   (c) Montrer que $\bigcup_{n=1}^{+\infty} B_n = \bigcup_{n=1}^{+\infty} A_n$.
   (d) Montrer que $P(\bigcup_{n=1}^{+\infty} A_n) = \lim_{n\to+\infty} P(A_n)$.
4. Quelle est la probabilité d'apparition de la séquence (pile, pile, face) ?

Exercice 7. On considère une urne qui contient deux boules vertes et une boule rouge dans laquelle on effectue une infinité de tirages successifs et avec remise. On définit E l'évènement :« on obtient au moins une boule rouge ».

On souhaite calculer $P(E)$ de trois manières différentes

On définit pour $n \in \mathbb{N}^*$, les évènements :
A_n : « on obtient la première boule rouge au n ième tirage ».
B_n : « on obtient au moins une boule rouge au cours des n premiers tirages ».
C_n : on obtient n boules vertes au cours des n premiers tirages ».

1. Calculer $P(A_n), P(B_n); P(C_n)$.
2. Exprimer E à l'aide des A_n et en déduire $P(E)$.
3. Exprimer E à l'aide des B_n et en déduire $P(E)$.
4. Exprimer $\overline{E}$ à l'aide des C_n et en déduire $P(E)$.
5. Que dire de l'évènement E ?

Utiliser la Formule des Probabilités composées

Exercice 8. Une urne contient une boule blanche et une rouge. On tire une boule, on note sa couleur et on la remet dans l'urne en y ajoutant deux autres boules de la même couleur, puis on répète l'opération. Quelle est la probabilité que les n premières boules tirées soient rouges ?

Exercice 9. : Deux joueurs $J1$ et $J2$ jouent avec deux dés non pipés.
J1 gagnera en amenant un total de 7 et J2 gagnera en amenant un total de 6.
J2 joue le premier et ensuite (si il y a une suite) J_1 et J_2 jouent alternativement.
Le jeu s'arrête dès que l'un d'entre eux gagne.
Pour tout $i \in \mathbb{N}^*$, $n \in \mathbb{N}^*$, on considère les événements suivants :

— C_i :« J1 amène 7 au $i^{\text{ème}}$ lancer »et D_i :« J2 amène 6 au $i^{\text{ème}}$ lancer ».
— $G_{1,n}$:« J1 gagne à son $n^{\text{ème}}$ lancer »et $G_{2,n}$:« J2 gagne à son $n^{\text{ème}}$ lancer »
— G_1 :« J1 gagne »et G_2 :« J2 gagne »

1. Calculer la probabilité des événements C_i et D_i pour tout i.
2. Calculer la probabilité des événements $G_{1,n}$ et $G_{2,n}$ pour tout n.
3. En déduire la probabilité de succès de chacun des joueurs.

Utiliser la Formule des Probabilités Totales

Exercice 10. : Dans une zone désertique, un animal erre entre trois points d'eau A,B et C.
A l'instant t=0, il se trouve au point A.
Quand il a épuisé l'eau du point où il se trouve, il part avec équiprobabilité rejoindre l'un des deux autres points d'eau.
L'eau du point qu'il vient de quitter se régénère alors.
Soit $n \in \mathbb{N}$.

On note A_n l'événement" l'animal est en A après son $n^{\text{ième}}$ trajet".
On note B_n l'événement" l'animal est en B après son $n^{\text{ième}}$ trajet".
On note C_n l'événement" l'animal est en C après son $n^{\text{ième}}$ trajet".
On pose $P(A_n) = a_n$, $P(B_n) = b_n$ et $P(C_n) = c_n$.

1. (a) Exprimer, en le justifiant, a_{n+1} en fonction de a_n, b_n et c_n.
   (b) Exprimer, de même, b_{n+1} et c_{n+1} en fonction de a_n, b_n et c_n.
2. On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}$.
   (a) Justifier que la matrice A est diagonalisable.
   (b) Prouver que $-\dfrac{1}{2}$ est valeur propre de A et déterminer le sous-espace propre associé.
   (c) Déterminer une matrice P inversible et une matrice D diagonale de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ telles que $D = P^{-1}AP$.
   Remarque : Le calcul de P^{-1} n'est pas demandé.
3. Montrer comment les résultats de la question 2. peuvent être utilisés pour calculer a_n, b_n et c_n en fonction de n.
   Remarque : Aucune expression finalisée de a_n, b_n et c_n n'est demandée.

Exercice 11. : L'information »Elvis Presley est encore en vie « est transmise de proche en proche parmi n personnes de la personne 1 à la personne n. Chaque personne i de cette chaîne humaine transmet l'info reçue avec une proba p et l'info contraire avec la proba 1-p. On souhaite déterminer la proba p_n que la personne n reçoise l'info »Elvis Preslez est encore en vie « Déterminer p_1, p_2, p_3(faire un arbre) Déterminer p_{n+1} en fonction de p_n En déduire $\underset{n\to+\infty}{lim}\ p_n$

Exercice 12. : On dispose de deux urnes U_1 et U_2.
L'urne U_1 contient deux boules blanches et trois boules noires.
L'urne U_2 contient quatre boules blanches et trois boules noires.
On effectue des tirages successifs dans les conditions suivantes :
on choisit une urne au hasard et on tire une boule dans l'urne choisie.
On note sa couleur et on la remet dans l'urne d'où elle provient.
Si la boule tirée était blanche, le tirage suivant se fait dans l'urne U_1.
Sinon le tirage suivant se fait dans l'urne U_2.
$\forall n \in \mathbb{N}^*$, on note B_n l'événement « la boule tirée au $n^{\text{ième}}$ tirage est blanche ».
On pose également $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $p_n = P(B_n)$.

1. Calculer p_1.
2. Prouver que : $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $p_{n+1} = -\dfrac{6}{35}p_n + \dfrac{4}{7}$.
3. En déduire, pour tout entier naturel n non nul, la valeur de p_n.

Utiliser la Formule de Bayes

Exercice 13. Pour chaque entier $n \in \mathbb{N}$, on dispose d'une urne U_n ayant $n!$ jetons donc chacun est numéroté. L'expérience aléatoire consiste à choisir un entier k avec une proba de λx^k où $x \in]0,1[$ Une fois cet entier k choisi, on extrait un jeton de l'urne U_k.

1. Comment choisir λ pour disposer d'une probabilité sur $\mathbb{N}$.
2. Quelle est la probabilité de tirer le jeton numéro 1 d'une urne, peu importe l'urne ?
3. A l' issue de l'expérience aléatoire, on a tiré le numéro 1. Quelle est la probabilité qu'il provienne de U_2.

Exercice 14. :On considère n sacs $S_1, S_2, \cdots, S_n$.
Le sac S_k contient k jetons blancs et $n+1-k$ jetons rouges. On choisit un sac. La probabilité que le sac S_k soit choisi est égale à $k\alpha$. On tire ensuite un jeton au hasard dans le sac choisi.
1. Trouver la valeur de α.
2. Sachant que le jeton tiré est rouge, déterminer la probabilité qu'il provienne du sac S_k.

Exercice 15. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On admet que dans une population la probabilité p_n pour une famille d'avoir exactement n enfants est donnée par $p_n = \alpha p^n$ où $p \in]0,1[$ et $p(1+\alpha) < 1$. On suppose de plus que les naissances d'une fille ou d'un garçon sont équiprobables.

1. Quelle est la probabilité qu'une famille n'ait pas d'enfants ?
2. Pour $k \geq 1$, calculer la probabilité qu'une famille ait exactement k garçons.
3. Étant donnée une famille ayant au moins un garçon, quelle est la probabilité qu'elle en ait au moins deux ?

Famille d'événements mutuellement indépendants

Exercice 16. Soient $s \in]1, +\infty[, \lambda \in \mathbb{R}$

1. Pour quelle valeur de λ peut-on définir une probabilité sur $(\mathbb{N}^*, \mathcal{P}(\mathbb{N}^*))$ en posant $P(\{n\}) = \dfrac{\lambda}{n^s}$ pour $n \in \mathbb{N}^*$?
2. Si $m \in \mathbb{N}^*$, on note A_m l'évènement « est un multiple de m ». Déterminer $P(A_m)$.
3. On note $\mathcal{P}$ l'ensemble des nombres premiers.
   (a) En admettant que l'ensemble des nombres premiers est infini, montrer que $\mathcal{P}$ est dénombrable.
   (b) Montrer que $(A_p)_{p\in\mathcal{P}}$ est une famille d'évènements mutuellement indépendants.
   (c) En déduire que $\prod\limits_{p\in\mathcal{P}} \dfrac{1}{1-p^s} = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} \dfrac{1}{n^s}$. *Cette formule due à Euler permet de faire le lien entre l'ensemble des nombres premiers et la fonction zeta de Riemann.*