classes préparatoires scientifiques Lycée Brizeux

Concours Blanc
PSI
MATHEMATIQUES

Lundi 24 Février

Durée : 4 heures

Niveau E3A/CCINP

(Documents, calculatrice et portables interdits)

N.B. : le candidat attachera la plus grande importance à la clarté, à la précision et à la concision de la rédaction. Si un candidat est amené à repérer ce qui peut lui sembler être une erreur d'énoncé, il le signalera sur sa copie et devra poursuivre sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il a été amené à prendre.

RAPPEL DES CONSIGNES

- Utiliser uniquement un stylo noir ou bleu foncé non effaçable pour la rédaction de votre composition ; d'autres couleurs, excepté le vert, bleu clair ou turquoise, peuvent être utilisées, mais exclusivement pour les schémas et la mise en évidence des résultats.
- Ne pas utiliser de correcteur.
- Numéroter vos copies
- Écrire le mot FIN à la fin de votre composition.

EXERCICE I

1. Pour $\alpha \in]0,1[$, Pour $x \in]0,1[$, justifier l'existence de $I(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{x^t}{t^\alpha}\,\mathrm{d}t$.
2. Donner l'ensemble de définition de $\Gamma : s \mapsto \displaystyle\int_0^{+\infty} t^{s-1}e^{-t}\,\mathrm{d}t$.
3. Déterminer une expression de $I(x)$ faisant intervenir $\ln x, \alpha$ et $\Gamma(1-\alpha)$.

EXERCICE II
Fonction de Bessel

Soit une fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x) = \int_0^\pi \cos\big(x\sin(t)\big)\,\mathrm{d}t.$$

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note :

$$W_n = \int_0^\pi \sin^{2n}(t)\,\mathrm{d}t.$$

1. Montrer que f est bien définie sur $\mathbb{R}$.
   On admet que f est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}$ et
   $$\forall x \in \mathbb{R}, f'(x) = \int_0^\pi \frac{\partial}{\partial x}\cos\big(x\sin(t)\big)\,\mathrm{d}t.$$
   $$\forall x \in \mathbb{R}, f''(x) = \int_0^\pi \frac{\partial^2}{\partial x^2}\cos\big(x\sin(t)\big)\,\mathrm{d}t.$$
2. Soit une fonction $h : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par :
   $$\forall (x,t) \in \mathbb{R}^2, \quad h(x,t) = \cos(t)\sin\big(x\sin(t)\big).$$
   Justifier l'existence de $\dfrac{\partial h}{\partial t}$, puis déterminer $\dfrac{\partial h}{\partial t}(x,t)$ pour tout $(x,t) \in \mathbb{R}^2$.
3. En déduire que f est solution de l'équation différentielle :
   $$xy'' + y' + xy = 0. \qquad \textbf{(E)}$$

4. On suppose qu'il existe une solution de $(\mathbf{E})$ développable en série entière notée $\sum_{n \geq 0} a_n x^n$ de rayon de convergence $R > 0$.

   Montrer que $a_1 = 0$ et que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$:

$$a_n = -\frac{a_{n-2}}{n^2}.$$

5. En utilisant un théorème d'interversion série intégrale, montrer que f est développable en série entière au voisinage de 0 et exprimer les coefficients du développement de f en fonction des termes de la suite $(W_n)_{n \in \mathbb{N}}$.
6. Déduire des questions précédentes que f est l'unique solution développable en série entière de $(\mathbf{E})$ vérifiant $f(0) = \pi$.
7. En déduire, pour tout $n \in \mathbb{N}$, une expression de W_n en fonction de n.

PROBLÈME 1

File d'attente

Toutes les variables aléatoires sont définies sur un même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$.

On s'intéresse à une file d'attente à un guichet. À l'instant 0 , la file contient un client. On suppose qu'à chaque instant $k \in \mathbb{N}^*$ il peut arriver au plus un nouveau client dans la file.

Pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, on note X_k la variable aléatoire qui vaut 1 si un nouveau client arrive à l'instant k et 0 sinon.

On suppose que $(X_k)_{k \in \mathbb{N}^*}$. est une suite de variables aléatoires indépendantes et identiquement distribuées selon une loi de Bernoulli de paramètre $p \in]0,1[$.

On repère chaque client par un indice qui donne son ordre d'arrivée dans la file : par définition, le client initialement présent a pour indice $n = 0$, le premier nouvellement arrivé a pour indice $n = 1$, etc.

On rappelle que la fonction génératrice d'une variable aléatoire X à valeurs dans $\mathbb{N}$ est la fonction notée G_X définie par :

$$G_X(t) = \sum_{j=0}^{+\infty} \mathbb{P}(X = j) t^j$$

Partie I - Temps d'arrivée du n-ième client

Q1. On note T_1 la variable aléatoire égale au temps écoulé entre le temps 0 et le temps où arrive le client d'indice 1 .
Justifier que pour tout $k \in \mathbb{N}^*, \mathbb{P}(T_1 = k) = (1-p)^{k-1} p$.

Q2. On note A l'événement « aucun nouveau client n'arrive dans la file ».
Exprimer A en fonction des événements $[T_1 = k], k \in \mathbb{N}^*$. En déduire $\mathbb{P}(A)$. Interpréter.

Q3. Déterminer le rayon de convergence R de la fonction génératrice de T_1, puis calculer sa somme.

Q4. En déduire l'espérance et la variance de T_1.

Q5. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on note T_n la variable aléatoire égale au temps écoulé entre l'arrivée du client d'indice $n-1$ et le client d'indice n. On admet que les variables aléatoires T_n sont indépendantes et de même loi.
On note $D_n = T_1 + \ldots + T_n$ la variable aléatoire qui donne le temps d'arrivée du client d'indice n.
Calculer l'espérance, la variance et la fonction génératrice G_{D_n} de D_n.

Q6. Rappeler le développement en série entière de $(1+x)^a$ au voisinage de $x = 0$ pour $\alpha \in \mathbb{R}$.
En déduire le développement en série entière de G_{D_n} en 0 et montrer que pour tout $(k, n) \in (\mathbb{N}^*)^2$:

$$\mathbb{P}(D_n = k) = \begin{cases} 0 & \text{si } k < n \\ \dbinom{k-1}{k-n} p^n (1-p)^{k-n} & \text{sinon.} \end{cases}$$

Partie II - Étude du comportement de la file

II. 1 - Une suite récurrente

Soient $a > 0$ et $f : \begin{cases} \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ x \mapsto \exp(a(x-1)) \end{cases}$

On s'intéresse au comportement de la suite $(z_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ définie par

$$z_1 \in]0,1[\quad \text{et} \quad \forall n \in \mathbb{N}^*, z_{n+1} = f(z_n)$$

Q7. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*, z_n \in]0,1[$ et $z_{n+1} - z_n$ est du même signe que $z_2 - z_1$.

Q8. En déduire que $(z_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ converge vers une limite $\ell \in [0,1]$ vérifiant $f(\ell) = \ell$.

Q9. Soit la fonction $\psi : \begin{cases}]0,1] \to \mathbb{R} \\ x \mapsto \ln(x) - a(x-1) \end{cases}$.

Montrer que pour tout $x > 0$, on a : $0 \leqslant \psi(x) \Leftrightarrow f(x) \leqslant x$ et $\psi(x) = 0 \Leftrightarrow f(x) = x$.

Q10. On suppose dans cette question que $a \leqslant 1$.

Étudier le signe de ψ et montrer qu'elle ne s'annule qu'en $x = 1$. En déduire que $z_n \to 1$.

Q11. On suppose dans cette question que $a > 1$.

Étudier le signe de ψ et montrer que l'équation $f(x) = x$ d'inconnue $x \in [0, 1]$ admet exactement deux solutions α et 1 avec $\alpha \in]0, 1[$ qu'on ne cherchera pas à expliciter. En distinguant les cas $z_1 \in]0, \alpha]$ et $z_1 \in]\alpha, 1[$, montrer que $z_n \underset{n\to+\infty}{\to} \alpha$.

II. 2 - Groupes de clients

On suppose que les clients de la file d'attente sont servis suivant leur ordre d'arrivée par un unique serveur et que la durée de service de chaque client est une variable aléatoire qui suit la loi de Poisson de paramètre $\lambda > 0$: pour tout $k \in \mathbb{N}$, le service a une durée k avec la probabilité $e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!}$.

On rappelle qu'initialement, la file contient un unique client : le client d'indice 0 .

On note S la variable aléatoire égale à la durée de service de ce client : comme à chaque instant il arrive au plus un nouveau client, il peut arriver entre 0 et S nouveaux clients pendant le temps de passage au guichet du client d'indice 0 . Les variables S et $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont supposées indépendantes.

On appelle « clients du premier groupe » les clients qui sont arrivés pendant que le client d'indice 0 était servi.

Par récurrence, pour tout $k \geqslant 2$, on définit les clients du k-ième groupe comme étant les clients qui sont arrivés pendant que ceux du $(k-1)$-ième groupe étaient servis.

Pour tout $k \geqslant 1$, on note V_k la variable aléatoire égale au nombre de clients du k-ième groupe.

Par construction, pour $n \in \mathbb{N}^*$, si le n-ième groupe est vide, alors l'événement $[V_k = 0]$ est réalisé pour tout $k \geqslant n$.

Q12. Quelle est la situation concrète décrite par l'événement $Z = \bigcup_{n\in\mathbb{N}^*} [V_n = 0]$?

Q13. Quelle est la loi du nombre N_n de clients qui sont arrivés dans la file d'attente dans l'intervalle de temps $[\![1, n]\!]$?

Q14. Pour tout $(n, k) \in \mathbb{N}^2$, calculer $\mathbb{P}(V_1 = k \mid S = n)$.

En déduire que V_1 suit une loi de Poisson dont on précisera le paramètre

Q15. On note $z_n = \mathbb{P}(V_n = 0)$. Montrer que $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge et que $\mathbb{P}(Z) = \lim_{n\to+\infty} z_n$.

Q16. Justifier que pour tout $(j, n) \in \mathbb{N}^2, \mathbb{P}(V_{n+1} = 0 \mid V_1 = j) = \mathbb{P}(V_n = 0)^j$. On distinguera le cas $j = 0$.

Q17. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*, z_{n+1} = \exp(\lambda p (z_n - 1))$.

Q18. Déterminer, suivant les valeurs de λp, la limite de la suite $(z_n)_{n\in N}$. Interpréter.

PROBLÈME 2
Les matrices de Kac

Notations

- Pour $n \in \mathbb{N}^*$, $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ désigne l'ensemble des matrices carrées de taille n à coefficients réels et $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ désigne l'ensemble des matrices carrées de taille n à coefficients complexes.
- Dans tout ce problème, les vecteurs de $\mathbb{R}^n$ seront notés en colonnes.
- La lettre i désigne le nombre complexe usuel vérifiant $i^2 = -1$.
  On s'interdira d'utiliser cette lettre pour tout autre usage !

Objectifs

Le but de ce problème est d'étudier quelques propriétés spectrales de deux matrices $A_n \in \mathcal{M}_{n+1}(\mathbb{R})$ et $B_n \in \mathcal{M}_{n+1}(\mathbb{R})$ introduites par Mark Kac au milieu du XX^e siècle. Ces liens ont été mis en évidence par Alan Edelman et Eric Kostlan au début des années 2000.

Ce problème est divisé en trois parties largement indépendantes. La **Partie I** introduit les matrices de Kac en taille 3 et met en évidence les propriétés qui seront démontrées en taille quelconque dans les **Parties II** et **III**.

Partie I - La dimension 3

On considère les matrices

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad B = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 2 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

1. Déterminer le polynôme caractéristique $\chi_A = \det(XI_3 - A)$ de A et le décomposer en facteurs irréductibles dans $\mathbb{R}[X]$.
2. En déduire que la matrice A est diagonalisable sur $\mathbb{R}$. Donner la liste des valeurs propres de A et la dimension des espaces propres correspondants. *On ne demande pas de déterminer les espaces propres de A dans cette question.*

3. Déterminer le polynôme caractéristique χ_B de B et le décomposer en facteurs irréductibles dans $\mathbb{R}[X]$, puis dans $\mathbb{C}[X]$. Vérifier que $\chi_A(X) = i\chi_B(iX)$.
4. La matrice B est-elle diagonalisable sur $\mathbb{R}$? Est-elle diagonalisable sur $\mathbb{C}$? Donner la liste des valeurs propres réelles puis complexes de B et la dimension des espaces propres sur $\mathbb{R}$ et $\mathbb{C}$ correspondants. *On ne demande pas de déterminer les espaces propres de B dans cette question.*

On considère :

$$D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & i & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_3(\mathbb{C}).$$

5. Exprimer $D^{-1}AD$ à l'aide de la matrice B.

Soit $\Delta = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{2} & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.

6. Calculer $\Delta^{-1}A\Delta$. En déduire à nouveau que la matrice A est diagonalisable sur $\mathbb{R}$.

Partie II - Étude d'un endomorphisme

Objectifs

Dans cette partie, on introduit la matrice B_n et on en étudie ses propriétés spectrales à l'aide d'un endomorphisme de dérivation.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ un entier naturel fixé. Pour $k \in [\![0, n]\!]$, on note $f_k : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C}$ la fonction définie par :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f_k(x) = \cos^k(x)\sin^{n-k}(x).$$

On note V_n le $\mathbb{C}$-espace vectoriel défini par :

$$V_n = \mathrm{Vect}_{\mathbb{C}}(f_0, f_1, \dots, f_n) = \left\{ \sum_{k=0}^{n} \lambda_k f_k \ / \ (\lambda_0, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{C}^{n+1} \right\}.$$

1. Montrer que la famille $(f_0, f_1, \dots, f_n)$ est libre. En déduire la dimension de l'espace vectoriel complexe V_n.
2. Pour $k \in [\![0, n]\!]$, montrer que $f_k' \in V_n$. En déduire que :

$$\begin{array}{rccl} \varphi_n : & V_n & \longrightarrow & V_n \\ & f & \longmapsto & \varphi_n(f) = f' \end{array}$$

définit un endomorphisme de V_n et que sa matrice B_n dans la base $(f_0, f_1, \dots, f_n)$ est la matrice :

$$B_n = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ n & 0 & -2 & \ddots & & \vdots \\ 0 & n-1 & 0 & -3 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & & \ddots & 2 & 0 & -n \\ 0 & \dots & \dots & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{n+1}(\mathbb{R}).$$

Pour $k \in [\![0, n]\!]$, on note $g_k : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C}$ la fonction définie par : $\forall x \in \mathbb{R}, \quad g_k(x) = e^{i(2k-n)x}$.

3. Montrer que : $\forall x \in \mathbb{R}, \quad g_k(x) = (\cos x + i \sin x)^k (\cos x - i \sin x)^{n-k}$.
4. En déduire, à l'aide de la formule du binôme de Newton, que : $\forall k \in [\![0, n]\!], \quad g_k \in V_n$.
5. Pour $k \in [\![0, n]\!]$, calculer g_k'. En déduire que φ_n est diagonalisable. Donner la liste des valeurs propres complexes de φ_n et décrire les espaces propres correspondants.
6. Pour quelles valeurs de n l'endomorphisme φ_n est-il un automorphisme de V_n ?
7. Écrire la décomposition de g_n dans la base $(f_0, \dots, f_n)$ et en déduire que :

$$\mathrm{Ker}\,(B_n - inI_{n+1}) = \mathrm{Vect} \begin{pmatrix} q_0 \\ q_1 \\ \vdots \\ q_n \end{pmatrix},$$

où pour tout $k \in [\![0, n]\!]$, on note $q_k = i^{n-k}\binom{n}{k}$.

Partie III - Les matrices de Krac de taille $n+1$

Objectifs

Dans cette partie, on introduit la matrice A_n, On utilise les résultats de la **Partie II** pour étudier les propriétés spectrales de la matrice A_n.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ un entier naturel fixé. On note A_n la matrice tridiagonale suivante :

$$A_n = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ n & 0 & 2 & \ddots & & \vdots \\ 0 & n-1 & 0 & 3 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & & \ddots & 2 & 0 & n \\ 0 & \dots & \dots & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{n+1}(\mathbb{R}).$$

Le terme général $a_{k,l}$ de la matrice A_n vérifie donc :

- $a_{k,k+1} = k$ si $1 \leqslant k \leqslant n$,
- $a_{k,k-1} = n-k+2$ si $2 \leqslant k \leqslant n+1$,
- $a_{k,l} = 0$ pour tous les couples $(k,l) \in [\![1, n+1]\!]^2$ non couverts par les formules précédentes.

On note enfin $D_n \in \mathcal{M}_{n+1}(\mathbb{C})$ la matrice diagonale dont le k-ième terme diagonal d_{kk} vérifie $d_{kk} = i^{k-1}$.

1. Soient $M = (m_{kl})_{1 \leqslant k,l \leqslant p} \in \mathcal{M}_p(\mathbb{C})$ une matrice de taille p et $D = (d_{kl})_{1 \leqslant k,l \leqslant p} \in \mathcal{M}_p(\mathbb{C})$ une matrice diagonale de taille p. Exprimer le terme général de la matrice DM en fonction des m_{kl} et des d_{kl}, puis exprimer le terme général de la matrice MD en fonction des m_{kl} et des d_{kl}.
2. Montrer que $D_n^{-1} A_n D_n = -iB_n$ où B_n est la matrice déterminée dans la **Partie II**. En déduire une relation simple entre $\chi_{A_n}(X)$ et $\chi_{B_n}(iX)$, où χ_{A_n} et χ_{B_n} sont les polynômes caractéristiques respectifs de A_n et B_n.
3. En déduire, à l'aide de la **Partie II**, que A_n est diagonalisable sur $\mathbb{R}$, que les valeurs propres de A_n sont les entiers de la forme $2k-n$ pour $k \in [\![0, n]\!]$ et que :

$$\mathrm{Ker}\,(A_n - nI_{n+1}) = \mathrm{Vect}\begin{pmatrix} p_0 \\ p_1 \\ \vdots \\ p_n \end{pmatrix},$$

   où pour tout $k \in [\![0, n]\!]$, on note $p_k = \binom{n}{k}$.