classes préparatoires scientifiques Lycée Brizeux

Concours Blanc
PSI
MATHEMATIQUES
Niveau Mines/Centrale

(Documents, calculatrice et portables interdits)

Lundi 24 Février 2025

Durée : 4 heures

N.B. : le candidat attachera la plus grande importance à la clarté, à la précision et à la concision de la rédaction. Si un candidat est amené à repérer ce qui peut lui sembler être une erreur d'énoncé, il le signalera sur sa copie et devra poursuivre sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il a été amené à prendre.

RAPPEL DES CONSIGNES

- Utiliser uniquement un stylo noir ou bleu foncé non effaçable pour la rédaction de votre composition ; d'autres couleurs, excepté le vert, bleu clair ou turquoise, peuvent être utilisées, mais exclusivement pour les schémas et la mise en évidence des résultats.
- Ne pas utiliser de correcteur.
- Numéroter vos copies
- Écrire le mot FIN à la fin de votre composition.

Ce sujet est composé de deux problèmes : un premier problème extrait d'un début de sujet Mines d'une durée estimée à 1h30 et d'un second problème extrait d'un sujet Centrale d'une durée estimée de 2h30 .

PROBLÈME I

Notations

- n désigne un entier naturel non nul.
- $\mathbf{K}$ désigne $\mathbf{R}$ ou $\mathbf{C}$.
- $M_n(\mathbf{K})$ désigne l'espace vectoriel des matrices carrées de taille n et à coefficients dans K et, pour une matrice M de $M_n(\mathbf{K})$, on note χ_M son polynôme caractéristique.
- On confondra abusivement, pour le calcul matriciel, le vecteur $X = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ de $\mathbf{K}^n$

  avec la matrice colonne $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ . \\ . \\ . \\ x_n \end{pmatrix}$ de ses coordonnées dans la base canonique de $\mathbf{K}^n$.
- Pour $X = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ de $\mathbf{C}^n$, on notera son conjugué $\overline{X} = (\overline{x_1}, \overline{x_2}, \ldots, \overline{x_n})$, sa partie réelle $\mathrm{Re}(X) = \dfrac{X + \overline{X}}{2}$ et sa partie imaginaire $\mathrm{Im}(X) = \dfrac{X - \overline{X}}{2i}$.
- Si $M \in M_n(\mathbf{R})$, et $\mathbf{K} = \mathbf{R}$ ou $\mathbf{C}$, l'endomorphisme de $\mathbf{K}^n$ canoniquement associé à M est $\begin{array}{ccc} \mathbf{K}^n & \to & \mathbf{K}^n \\ X & \mapsto & MX. \end{array}$
- Les parties 1, 2 sont indépendantes.

Rappels

1. Deux matrices A et B de $M_n(\mathrm{K})$ sont semblables dans $M_n(\mathrm{K})$ si il existe une matrice P de $M_n(\mathrm{K})$ inversible telle que $A = PBP^{-1}$.
2. Deux matrices A et B de $M_n(\mathbf{R})$ sont semblables dans $M_n(\mathbf{C})$ si il existe une matrice P de $M_n(\mathbf{C})$ inversible telle que $A = PBP^{-1}$.

1 Matrices semi-simples

Définition 1 *Une matrice de $M_n(\mathbf{R})$ est dite semi-simple si elle est diagonalisable dans $M_n(\mathbf{C})$.*

Définition 2 *Une matrice M de $M_n(\mathbf{R})$ est dite presque diagonale s'il existe*

i) deux entiers naturels p et q ;

ii) q réels $a_1, a_2, \ldots, a_q$;

iii) q réels non nuls $b_1, b_2, \ldots, b_q$;

iv) une matrice D diagonale de $M_p(\mathbf{R})$ tels que $p + 2q = n$ et M est la matrice bloc suivante :

$$M = \begin{pmatrix} D & 0 & 0 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & M(a_1, b_1) & 0 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & M(a_2, b_2) & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \ddots & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & M(a_q, b_q) \end{pmatrix}$$

où, $\forall j \in [\![1; q]\!] : M(a_j, b_j) = \begin{pmatrix} a_j & b_j \\ -b_j & a_j \end{pmatrix}$. Si $p = 0$, la matrice D n'est pas présente dans la matrice diagonale par blocs M. De même, si $q = 0$, alors $M = D$.

Soit A la matrice de $M_2(\mathbf{R})$ définie par $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$.

1 ▷ La matrice A est-elle semi-simple ?

Soit B la matrice de $M_2(\mathbf{R})$ définie par $B = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -5 & 1 \end{pmatrix}$.

2 ▷ Démontrer que B est semi-simple et en déduire l'existence d'une matrice Q de $M_2(\mathbf{R})$ inversible et de deux réels a et b à déterminer tels que :

$$B = Q \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix} Q^{-1}.$$

Indication : on pourra, pour un vecteur propre V de B, introduire les vecteurs $W_1 = \mathrm{Re}(V)$ et $W_2 = \mathrm{Im}(V)$.

Soit M une matrice de $M_2(\mathbf{R})$.

On suppose dans la question 3) seulement que M admet deux valeurs propres complexes $\mu = a + ib$ et $\overline{\mu} = a - ib$ avec $a \in \mathbf{R}$ et $b \in \mathbf{R}^*$.

3 ▷ Démontrer que M est semi-simple et semblable dans $M_2(\mathbf{R})$ à la matrice $\begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}$.

4 ▷ Démontrer que M est semi-simple si, et seulement si, l'une des conditions suivantes est satisfaite :

i) M est diagonalisable dans $M_2(\mathbf{R})$;

ii) χ_M admet deux racines complexes conjuguées de partie imaginaire non nulle.

5 ▷ Soit N une matrice de $M_n(\mathbf{R})$ semblable à une matrice presque diagonale. Démontrer que N est semi-simple.

6 ▷ Soit N une matrice de $M_n(\mathbf{R})$. Donner la forme factorisée de χ_N dans $\mathbf{C}[X]$ en précisant, dans les notations, les racines réelles et les racines complexes conjuguées. En déduire que si N est semi-simple alors elle est semblable dans $M_n(\mathbf{R})$ à une matrice presque diagonale.

2 Une caractérisation des matrices diagonalisables de $M_n(\mathbf{C})$

Dans cette partie, E désigne un $\mathbf{C}$-espace vectoriel de dimension n et u désigne un endomorphisme de E.

On suppose dans les questions 7), 8) et 9) que u est diagonalisable. On note $\mathcal{B} = (v_1, v_2, \ldots, v_n)$ une base de E formée de vecteurs propres de u. Soit F un sous-espace vectoriel de E, différent de $\{0_E\}$ et de E.

7 ▷ Démontrer qu'il existe $k \in [\![1; n]\!]$ tel que $v_k \notin F$ et qu'alors F et la droite vectorielle engendrée par v_k sont en somme directe. On note alors

$$\mathcal{A} = \big\{H \text{ sous-espace vectoriel de } E \text{ tel que } u(H) \subset H \text{ et } F \cap H = \{0_E\}\big\} \qquad \text{et}$$
$$\mathcal{L} = \big\{p \in \mathbf{N}^*,\ \exists H \in \mathcal{A} : p = \dim(H)\big\}.$$

8 ▷ Démontrer que $\mathcal{L}$ admet un plus grand élément que l'on nommera r.

9 ▷ Démontrer que F admet un supplémentaire G dans E stable par u.

10 ▷ On suppose que tout sous-espace vectoriel de E possède un supplémentaire dans E stable par u. Démontrer que u est diagonalisable. En déduire une caractérisation des matrices diagonalisables de $M_n(\mathbf{C})$.

Indication : on pourra raisonner par l'absurde et introduire le sous espace vectoriel égal à la somme des sous-espaces propres de u.

PROBLÈME II
Les fonctions de Lambert

Objectifs
L'objet de ce problème est l'étude de différentes propriétés des fonctions de Lambert ainsi que leur application en probabilités.

Dépendance des parties
Les fonctions V et W définies dans la partie I sont utilisées dans les parties II, III . Les parties II, III sont indépendantes les unes des autres.

Notations
Pour des entiers k et n avec $0 \leqslant k \leqslant n$, le coefficient binomial « k parmi n » est noté $\displaystyle\binom{n}{k}$.

Lorsque $k \leqslant n$, $[\![k, n]\!]$ représente l'ensemble des nombres entiers compris, au sens large, entre k et n.

I - Fonctions de Lambert

Dans cette partie, on définit les fonctions de Lambert et on étudie certaines de leurs propriétés. On considère dans toute cette partie, l'application

$$f : \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & x\mathrm{e}^x \end{array} \right.$$

1. Justifier que l'application f réalise une bijection de l'intervalle $[-1, +\infty[$ sur l'intervalle $[-\mathrm{e}^{-1}, +\infty[$.
   Dans la suite du sujet, la réciproque de cette bijection est notée W. On rappelle que ceci signifie que, pour tout réel $x \geqslant -\mathrm{e}^{-1}$, $W(x)$ est l'unique solution de l'équation $f(t) = x$ (équation d'inconnue $t \in [-1, +\infty[$).
2. Justifier que W est continue sur $[-\mathrm{e}^{-1}, +\infty[$ et est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $]-\mathrm{e}^{-1}, +\infty[$.
3. Expliciter $W(0)$ et $W'(0)$.
4. Démontrer que $W(x) \underset{x \to 0}{\sim} x$, ainsi que $W(x) \underset{x \to +\infty}{\sim} \ln(x)$.
5. Tracer, sur le même dessin, les courbes $\mathcal{C}_f$ et $\mathcal{C}_W$ représentatives des fonctions f et W. Préciser les tangentes aux deux courbes au point d'abscisse 0 ainsi que la tangente à $\mathcal{C}_W$ au point d'abscisse $-\mathrm{e}^{-1}$.
6. Pour quelles valeurs du paramètre réel α la fonction $x \longmapsto x^\alpha W(x)$ est-elle intégrable sur $]0, 1]$?
7. Pour quelles valeurs du paramètre réel α la fonction $x \longmapsto x^\alpha W(x)$ est-elle intégrable sur $[1, +\infty[$?
8. Démontrer que l'application f réalise une bijection de l'intervalle $]-\infty, -1]$ sur l'intervalle $[-\mathrm{e}^{-1}, 0[$.
   Dans la suite du sujet, la réciproque de cette bijection est notée V.
9. Pour un paramètre réel m, on considère l'équation d'inconnue $x \in \mathbb{R}$:
   $$x\mathrm{e}^x = m \tag{I.1}$$
   Déterminer, en fonction de m, le nombre de solutions de (I.1).
   Expliciter les solutions éventuelles à l'aide des fonctions V et W.
10. Pour un paramètre réel m, on considère l'inéquation d'inconnue $x \in \mathbb{R}$:
    $$x\mathrm{e}^x \leqslant m \tag{I.2}$$
    En utilisant les fonctions V et W, déterminer suivant les valeurs de m le de solutions de (I.2).
    Illustrer graphiquement les différents cas.
11. Pour des paramètres réels non nuls a et b, on considère l'équation d'inconnue $x \in \mathbb{R}$:
    $$\mathrm{e}^{ax} + bx = 0 \tag{I.3}$$
    Déterminer, suivant les valeurs de a et b, le nombre de solutions de (I.3).
    Expliciter les solutions éventuelles à l'aide des fonctions V et W.

II - Probabilités

On étudie dans cette partie une situation dont la résolution fait intervenir les fonctions V et W définies dans la partie précédente. Les variables aléatoires considérées dans cette partie sont définies sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$. L'espérance et la variance d'une variable aléatoire X sont notées, sous réserve d'existence, respectivement $\mathbb{E}(X)$ et $\mathbb{V}(X)$.

Pour fidéliser sa clientèle, un commerçant organise une tombola permettant de gagner différents lots. Chaque client qui entre dans le magasin tire un billet de tombola. Chaque billet permet de gagner un lot avec la probabilité $p \in]0,1[$. On suppose que les tirages sont indépendants et on admet que le nombre N de billets distribués aux clients au cours d'une journée est une variable aléatoire qui suit une loi de Poisson de paramètre $\lambda > 0$. On note X le nombre de billets gagnants tirés au cours d'une journée et on admet que X est également une variable aléatoire. Pour que l'opération soit rentable, le commerçant souhaite que la probabilité de gagner au moins deux lots durant la même journée soit faible. On considère donc un réel $\alpha \in]0,1[$ et on souhaite réaliser la condition

$$\mathbb{P}(X \geqslant 2) \leqslant 1 - \alpha \tag{II.1}$$

Cependant, pour que l'opération intéresse les clients, le commerçant souhaite également que p soit le plus grand possible, tout en réalisant la condition (II.1).

1. Démontrer que X suit une loi de Poisson de paramètre λp. Donner l'espérance et la variance de X.
2. En utilisant l'inégalité de Markov, démontrer que si $p \leqslant 2\dfrac{1-\alpha}{\lambda}$ alors la condition (II.1) est satisfaite.
3. On pose $x = -(\lambda p + 1)$. Démontrer que la condition (II.1) est équivalente à la condition
$$x\mathrm{e}^x \leqslant -\alpha \mathrm{e}^{-1}$$
4. En utilisant l'une des fonctions V et W (définies dans la partie **I**) et la question **10**, discuter selon la position de λ par rapport à $-1 - V(-\alpha\mathrm{e}^{-1})$ l'existence d'un plus grand réel $p \in]0,1[$ satisfaisant la condition (II.1).

III - **Développement en série entière**

Le but de cette partie est d'établir que la fonction W définie dans la partie **I** est développable en série entière et de préciser son développement ainsi que son rayon de convergence.
On sera amené à utiliser ***Le théorème binomial d'Abel***, que l'on admet

$$\forall (a,y) \in \mathbb{C}^2, \quad ny^{n-1} = \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} (-ka)^{k-1}(y+ka)^{n-k}$$

On définit une suite $(a_n)_{n\geqslant 1}$ en posant,

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, a_n = \frac{(-n)^{n-1}}{n!}$$

On définit, lorsque c'est possible, $\quad S(x) = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} a_n x^n.$

1. Déterminer le rayon de convergence R de la série entière $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} a_n x^n$.
2. Justifier que la fonction S est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $]-R,R[$ et, pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, exprimer $S^{(n)}(0)$ en fonction de n.
3. Démontrer que la fonction S est définie et continue sur $[-R,R]$.
4. Démontrer que,
$$\forall x \in]-R,R[, \quad x(1+S(x))S'(x) = S(x)$$
`On pourra utiliser Le théorème binomial d'Abel`

   On considère la fonction $h : \left| \begin{array}{ccc}]-R,R[& \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & S(x)\mathrm{e}^{S(x)} \end{array} \right.$
5. Démontrer que h est solution sur $]-R,R[$ de l'équation différentielle $xy' - y = 0$.
6. Résoudre l'équation différentielle $xy' - y = 0$ sur chacun des intervalles $]0,R[$, $]-R,0[$, puis sur l'intervalle $]-R,R[$.
7. En déduire que,
$$\forall x \in]-R,R[, \quad S(x) = W(x)$$
8. Ce résultat reste-t-il vrai sur $[-R,R]$?

• • • FIN • • •