classes préparatoires scientifiques Lycée Brizeux

PSI
MATHEMATIQUES **Programme de Colle semaine $n°10$ du 25 Novembre 2024**

- Une colle sera du type d'un oral de **CCINP**, à savoir deux exercices :
  - Le premier exercice doit contenir :
    - Une question de cours (un énoncé d'une définition, d'une propriété ou d'un théorème) ou une démonstration qui sera **signalée en gras** dans le programme de colle.
      Deux niveaux de démonstration : niveau ($\star$) pour les volontaires.
    - Une application très directe du cours :
  - Un deuxième exercice portant sur une notion du programme de colle différente du premier exercice.
- **Comment préparer une colle ?** Il est indispensable de connaître son cours, savoir refaire les exemples traités en cours et les exercices mentionnés dans le programme de colle.

- **Notation** : Dès lors qu'il s'avère que le cours n'est pas su, la note sera obligatoirement inférieure à 8.
  Ensuite, les points seront rajoutés suivant votre autonomie face aux exercices.

- **Après la colle** : Avant le vendredi de la semaine suivant votre colle, vous devez me rendre votre cahier de colle où vous rédigerez au moins un des deux exercices

1 Eléments propres d'un endomorphisme ou d'une matrice carrée

Savoirs attendus :

1. Connaître parfaitement sans hésitation les définitions de : polynôme caractéristique , valeur propre, spectre, vecteurs propres, sous espaces propres et éléments propres.
2. Savoir calculer le polynôme caractéristique, déterminer les éléments propres d'un endo ou d'une matrice soit en passant par le polynôme caractéristique, soit en passant par la relation $u(x) = \lambda x$ avec $x \neq 0$ ou $AX = \lambda X$ avec $X \neq 0$.
3. **Si $u \circ v = v \circ u$, les sous espaces propres de l'un sont stables par l'autre**, application à la résolution d'une équation matricielle.
4. Propriétés usuelles : les coefficients particuliers du polynôme caractéristique, **le spectre sur $\mathbb{C}$ n'est jamais vide, celui sur $\mathbb{R}$ n'est pas vide quand la dimension est impaire**. Relation entre trace, déterminant et valeurs propres sur $\mathbb{K}$ quand le polynôme caractéristique est scindé sur $\mathbb{K}$.
5. Ordre de multiplicité d'une valeur propre : définition, et encadrement reliant dimension d'un sous espace propre et ordre de multiplicité d'une valeur propre. Application au cas d'une valeur propre simple où il suffit alors de trouver un seul vecteur propre pour trouver une base de son sous espace propre. **Démo ($\star$) : Si F est un sev stable par u, χ_{u_F} divise χ_u et encadrement reliant dimension d'un sous espace propre et ordre de multiplicité d'une valeur propre.**

2 Polynômes d'endomorphismes et matriciels

1. Définition, règles de calculs.
2. Polynôme Annulateur : définition, **Soit λ une valeur propre de $u \in \mathscr{L}(E)$ associée à un vecteur propre x, P un polynôme. Alors $P(\lambda)$ est une valeur propre de $P(u)$ associé au vecteur propre x. Si P est un polynôme annulateur de u, alors**
$$Sp_{\mathbb{K}}(u) \subset \{\lambda \in \mathbb{K} / P(\lambda) = 0\}$$
3. Théorème de Cayley Hamilton.
4. Déterminer puissances d'un endo. ou matrice à partir d'un polynôme annulateur.
5. Calcul de l'inverse d'une matrice A ou d'un endo u en la (ou le) présentant comme polynôme matriciel de A ou polynôme de l'endo u

3 Exercices à savoir refaire

Exercice 1. Éléments propres de :

1. $A = \begin{pmatrix} 0 & 6 & -1 \\ 6 & 0 & 6 \\ -1 & 6 & 0 \end{pmatrix}$
2. $A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & -1 \\ 3 & -2 & 0 \\ -2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$
3. $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \\ 2-m & m-2 & m \end{pmatrix}$
4. f défini par $f((u_n)_{n\in\mathbb{N}}) = (v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ où $v_0 = u_0$ et $\forall n \geq 1, v_n = \frac{u_{n-1}+u_n}{2}$.
5. f défini par $\forall P \in \mathbb{K}[X], f(P)(X) = (X^2 - 1)P' - 2XP$
6. $f : M \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R}) \longmapsto \mathrm{tr}\,(M)I_n$.

7. Soient $n \in \mathbb{N}$ tel que $n \geq 3, a \in \mathbb{R}$, $A = \begin{pmatrix} a & 2 & \cdots & 2 \\ 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & 0 & \vdots \\ 1 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$

Exercice 2. Soient $a \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}^*$ et f une application linéaire de $\mathbb{R}_n[X]$ qui à P associe $(X-a)P' - P + P(a)$.
Déterminer son noyau, son image et ses éléments propres.

Exercice 3. Déterminer le polynôme caractéristique, sans calcul de déterminant : $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 & 2 \\ 3 & 3 & 3 & 3 \\ 4 & 4 & 4 & 4 \end{pmatrix}$.

Exercice 4. Soit $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}$.

1. Montrer que A n'admet pas de polynôme annulateur non nul de degré inférieur ou égal à 1.
2. Trouver un polynôme annulateur de A unitaire de degré 2.
3. En déduire le polynôme unitaire annulateur de A de plus petit degré.
4. En déduire l'ensemble des polynômes annulateurs de A.
5. Calculer A^n pour $n \in \mathbb{N}$.
6. Montrer que $\mathbb{R}[A] = \{P(A)/P \in \mathbb{R}[X]\}$ est un sev d'un espace à préciser et en donner une base et la dimension.

Exercice 5. Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ de rang 1.

1. Trouver un polynôme annulateur de degré 2 de A.
2. Déterminer les puissances de A.
3. Que peut-on dire du spectre d'une matrice de rang 1 ?

Exercice 6. Soit $n \geq 1$ et $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$.

1. Démontrer que si ω est une valeur propre complexe de A de multiplicité s, alors $\overline{\omega}$ une valeur propre complexe de A de multiplicité s.
2. On suppose que $A^3 - 3A - 4I_n = 0$. Montrer que A est de déterminant strictement positif.
3. On suppose que $A^4 + A^2 + I_n = 0$. Montrer que n est pair.
4. On suppose que $A^3 + A^2 + A = 0$. Montrer que $\mathrm{tr}\,(A) \in \mathbb{Z}$, $\det(A) = 0$ ou 1.