classes préparatoires scientifiques Lycée Brizeux

PSI
MATHEMATIQUES **Programme de Colle semaine $n°1$ du 9 Septembre 2024**

- Une colle sera du type d'un oral de **CCINP**, à savoir deux exercices :
  - Le premier exercice doit contenir :
    - Une question de cours (un énoncé d'une définition, d'une propriété ou d'un théorème) ou une démonstration qui sera **signalée en gras** dans le programme de colle.
      Deux niveaux de démonstration : niveau ($\star$) pour les volontaires.
    - Une application très directe du cours :
  - Un deuxième exercice portant sur une notion du programme de colle différente du premier exercice.
- **Comment préparer une colle ?** Il est indispensable de connaître son cours, savoir refaire les exemples traités en cours et les exercices mentionnés dans le programme de colle.

- **Notation** : Dès lors qu'il s'avère que le cours n'est pas su, la note sera obligatoirement inférieure à 8. Ensuite, les points seront rajoutés suivant votre autonomie face aux exercices.

- **Après la colle** : Avant le vendredi de la semaine suivant votre colle, vous devez me rendre votre cahier de colle où vous rédigerez au moins un des deux exercices

1 Révisions de l'algèbre linéaire en PCSI

Vous devez connaître, savoir utiliser :

1. Calcul matriciel : savoir faire les différentes opérations sur les matrices, montrer qu'une matrice est inversible, déterminer l'inverse.
2. Les espaces vectoriels de référence.
3. Méthodes pour montrer que F est un sev de E. Mettre un ensemble sous forme de vect.
4. Les espaces de dimensions finies : notion de bases et de dimension finie, connaître les différentes méthodes pour obtenir une base, sous espaces supplémentaires, base adaptée à un sev, à une décomposition en somme directe de deux sev.
5. Applications linéaires :
   (a) méthode pour montrer qu'une application est linéaire, isomorphisme, endomorphisme, automorphisme.
   (b) Image, noyau.
   (c) Projecteur .
   (d) Théorème du rang.
6. Matrices et applications linéaires :
   (a) savoir construire la matrice d'une application linéaire et savoir déterminer l'application linéaire canoniquement associée à une matrice, déduction du noyau, rang, de l'image.
   (b) Changement de bases : effet d'un changement de base sur la matrice d'un vecteur, effet d'un changement du couple de bases sur la matrice d'une application linéaire, effet d'un changement de base sur la matrice d'un endomorphisme, matrices semblables.
7. Déterminants :
   (a) définition, cas particulier en dimension 2 et 3.
   (b) Caractérisation d'une base.
   (c) Déterminant d'un endomorphisme et d'une matrice carrée : déterminant d'un produit de matrices, du produit λA où $\lambda \in \mathbb{K}$, de la transposée, caractérisation d'une matrice inversible.
   (d) Calcul d'un déterminant (développement par rapport à une ligne ou une colonne, opérations possibles)

2 Formes linéaires et hyperplans

1. Savoirs attendus :
   (a) Montrer qu'une application est une forme linéaire sur E.
   (b) Les méthodes pour montrer qu'un sev H est un hyperplan de E :
      i. H admet une droite comme supplémentaire.
      ii. H est le noyau d'une forme linéaire non nulle de E.
      iii. $\dim H = \dim E - 1$.
   (c) Savoir construire un supplémentaire de H : $D = \text{Vect}\,(a)$ où $a \notin H$.
   (d) Savoir déterminer une équation linéaire de H dans une base de E.
2. Démos à connaître : **Niveau ($\star$)**
   (a) Savoir montrer que si H est le noyau d'une forme linéaire non nulle sur E, alors H est un hyperplan
   (b) Savoir montrer que si $a \notin H$ et H est un hyperplan de E , alors $\mathbf{H} \oplus \mathbf{Vect}\,(\mathbf{a}) = \mathbf{E}$

3 Exercices à savoir refaire

Exercice 1. : Soit $E = \mathbb{R}^3$. Soit $\mathscr{B}$ la base canonique de E et $\mathscr{B}' = (v_1 = (-1, 1, -3); v_2 = (3, 2, 1); v_3 = (2, 1, 1))$.
1. Montrer que $\mathscr{B}'$ est une base de E. Écrire la matrice du vecteur $(5, 1, 2)$ dans $\mathscr{B}'$.
2. Soit f défini par : $f(x, y, z) = (2x + z, x - 3y, -x + z)$.
a) Montrer que $f \in \mathscr{L}(E)$.
b) Déterminer la matrice de f dans la base $\mathscr{B}$, puis $\mathscr{B}'$.
3. Déterminer noyau et image de f.Sont-ils supplémentaires dans E ?

Exercice 2. : Montrer que l'espace des matrices symétriques et l'espace des matrices antisymétriques sont supplémentaires dans l'espace des matrices d'ordre n.

Exercice 3. Soit Φ l'application de $\mathbb{R}_3[X]$ dans $\mathbb{R}^4$: $P \mapsto (P(0), P'(0), P(-1), P'(-1))$.
1. Montrer que Φ est linéaire.
2. Déterminer $\text{Ker}\,\Phi$. L'application est-elle bijective ?
3. Exprimer M , matrice de Φ dans les bases canoniques de $\mathbb{R}_3[X]$ et $\mathbb{R}^4$.
4. M est-elle inversible ? Si oui, donner son inverse.

Exercice 4. : Dans $\mathbb{R}^3$ rapporté à sa base canonique, soit les deux sous espaces vectoriels :

$$\Pi = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / x + 2y + 3z = 0\}, D = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / 2x = 3y = 6z\}$$

Vérifier que Π et D sont supplémentaires dans $\mathbb{R}^3$ puis déterminer la matrice de projection sur D parallèlement à Π relativement à la base canonique de $\mathbb{R}^3$.

Exercice 5. :
1. Montrer que $H = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / x+2y+3z = 0\}$ est un hyperplan et donner une base de H et un supplémentaire de H dans $\mathbb{R}^3$
2. Montrer que $H = \{P \in \mathbb{R}_2[X] / P(1) = P'(1)\}$ est un hyperplan , donner un supplémentaire de H dans $\mathbb{R}_2[X]$, une équation de H dans la base canonique de $\mathbb{R}_2[X]$, et une base de H.