classes préparatoires scientifiques Lycée Brizeux

PSI
MATHEMATIQUES **Programme de Colle semaine $n°14$ du 6 Janvier 2025**

- Une colle sera du type d'un oral de **CCINP**, à savoir deux exercices :
  - Le premier exercice doit contenir :
    - Une question de cours (un énoncé d'une définition, d'une propriété ou d'un théorème) ou une démonstration qui sera **signalée en gras** dans le programme de colle.
      Deux niveaux de démonstration : niveau ($\star$) pour les volontaires.
    - Une application très directe du cours :
  - Un deuxième exercice portant sur une notion du programme de colle différente du premier exercice.
- **Comment préparer une colle ?** Il est indispensable de connaître son cours, savoir refaire les exemples traités en cours et les exercices mentionnés dans le programme de colle.
- **Notation** : Dès lors qu'il s'avère que le cours n'est pas su, la note sera obligatoirement inférieure à 8.
  Ensuite, les points seront rajoutés suivant votre autonomie face aux exercices.
- **Après la colle** : Avant le vendredi de la semaine suivant votre colle, vous devez me rendre votre cahier de colle où vous rédigerez au moins un des deux exercices

1 Suites et Séries de Fonctions

Vous devez connaître parfaitement les définitions et énoncés des théorèmes

1. Convergence Simple d'une suite de fonctions, d'une série de fonctions : bien connaître les définitions et la méthode pour étudier une convergence simple.
2. Convergence Uniforme d'une suite de fonctions, d'une série de fonctions : bien connaître les définitions et la méthode pour étudier une convergence uniforme, en particulier quand il s'agit d'une série alternée. Se souvenir comment majorer la norme infinie du reste qui est le plus petit majorant du reste. Connaître la propriété qui permet de montrer qu'on n'a pas convergence uniforme en trouvant une suite $(x_n)_n$ telle que $(f_n(x_n) - f(x_n))_n$ ne converge pas vers 0.**démo** ($\star$)
3. Convergence normale d'une série de fonctions.
4. Théorème de continuité d'une fonction limite ou d'une somme d'une série de fonctions .Savoir l'utiliser par l'absurde pour montrer qu'il n'y a pas de convergence uniforme.
5. Théorème de double limite. Savoir l'utiliser pour montrer que $\sum\limits_{n\geq 1} \dfrac{1}{n^x}$ ne converge pas uniformément sur $]1, +\infty[$.
6. Intégration sur un segment **démo** ($\star$)
7. Théorème de dérivation pour les suites de fonctions **démo** ($\star$), pour les séries de fonctions. Généralisation du théorème.
8. Théorème de convergence dominée pour une suite de fonctions.
9. Intégration terme à terme d'une série de fonctions

2 Exercices à savoir refaire

Ces exercices sont les exemples traités en cours.

Exercice 1.
1. Etudier la convergence simple et uniforme de $(f_n)_n$ où $f_n : x \mapsto x^n$.
2. Etudier la convergence simple et uniforme de $(f_n)_n$ où $f_n : x \mapsto e^{i\frac{x}{n}}$.
3. Etudier la convergence simple et uniforme de $(f_n)_n$ où $f_n : x \mapsto nx^2e^{-nx}$.
4. Etudier la convergence simple de $(f_n)_n$ où $f_n : x \mapsto Inf\left(n, \frac{x^2}{n}\right)$.
5. Etudier la convergence simple de $(f_n)_n$ où $f_n : x \mapsto \begin{cases} (1-\frac{x}{n})^n & \text{si } |x| \leq n \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$.

Exercice 2.
1. Montrer la convergence simple de la série de fonctions $\sum f_n$ où $f_n : x \mapsto \frac{x^n}{n!}$ sur $\mathbb{R}$ et montrer qu'elle ne converge pas uniformément sur $\mathbb{R}$.
2. Montrer qu'elle converge normalement sur tout segment de $\mathbb{R}$.

Exercice 3.
1. Montrer la convergence uniforme de la série de fonctions $\sum f_n$ où $f_n : x \mapsto \frac{(-1)^n}{n+x}$ sur $\mathbb{R}^+$ et montrer qu'elle ne converge pas normalement sur $\mathbb{R}^+$.
2. Soit $[a, b]$ segment de $\mathbb{R}$. Montrer qu'elle ne converge pas normalement sur $[a, b]$.

Exercice 4.
1. Donner l'ensemble de définition D de $\zeta : x \mapsto \sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^x}$.
2. Montrer que ζ est continue sur D.
3. En utilisant un théorème et un raisonnement par l'absurde, démontrer que $\sum\limits_{n\geq 1} \dfrac{1}{n^x}$ ne converge pas uniformément sur D.

4. Donner $\lim\limits_{x \to +\infty} \zeta(x)$.
5. Montrer que ζ est C^∞ sur D. En déduire les variations de ζ et montrer que ζ est convexe.
6. Représentation graphique de ζ.
7. Reprendre les questions précédentes avec $\mu : x \mapsto \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^x}$.

Exercice 5. 1. Montrer que $\forall x \in]-1,1[, \operatorname{Arctan} x = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{2n+1}$.

2. En déduire $\displaystyle\frac{\pi}{4} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1}$.

Exercice 6. 1. Montrer que $\forall x \in]-1,1[, \ln(1+x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n x^{n+1}}{n+1}$.

2. En déduire $\ln(2) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n+1}$.

Exercice 7. Déterminer $\displaystyle\lim_{n \to +\infty} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n(t)\,\mathrm{d}t$.

Exercice 8. Déterminer $\displaystyle\lim_{n \to +\infty} \int_0^{+\infty} \left(1 - \frac{t^2}{n}\right)^n \mathrm{d}t$.

Exercice 9. $(\star)$ Déterminer $\displaystyle\lim_{n \to +\infty} \int_0^{n} \left(1 + \frac{t^2}{n}\right)^n \mathrm{d}t$.

Exercice 10. Déterminer $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{t^2}{e^t - 1}\,\mathrm{d}t = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2}{n^3}$.