PSI
MATHEMATIQUES **Programme de Colle semaine $n°15$ du 13 Janvier 2025**

- Une colle sera du type d'un oral de **CCINP**, à savoir deux exercices :
  — Le premier exercice doit contenir :
    — Une question de cours (un énoncé d'une définition, d'une propriété ou d'un théorème) ou une démonstration qui sera **signalée en gras** dans le programme de colle.
    Deux niveaux de démonstration : niveau ($\star$) pour les volontaires.
    — Une application très directe du cours :
  — Un deuxième exercice portant sur une notion du programme de colle différente du premier exercice.
- **Comment préparer une colle ?** Il est indispensable de connaître son cours, savoir refaire les exemples traités en cours et les exercices mentionnés dans le programme de colle.

- **Notation** : Dès lors qu'il s'avère que le cours n'est pas su, la note sera obligatoirement inférieure à 8.
  Ensuite, les points seront rajoutés suivant votre autonomie face aux exercices.

- **Après la colle** : Avant le vendredi de la semaine suivant votre colle, vous devez me rendre votre cahier de colle où vous rédigerez au moins un des deux exercices

1 Suites et Séries de Fonctions

Vous devez connaître parfaitement les définitions et énoncés des théorèmes

1. Théorème de continuité d'une fonction limite ou d'une somme d'une série de fonctions .Savoir l'utiliser par l'absurde pour montrer qu'il n'y a pas de convergence uniforme.
2. Théorème de double limite. Savoir l'utiliser pour montrer que $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^x}$ ne converge pas uniformément sur $]1, +\infty[$.
3. Intégration sur un segment **démo** ($\star$)
4. Théorème de dérivation pour les suites de fonctions **démo** ($\star$), pour les séries de fonctions. Généralisation du théorème.
5. Théorème de convergence dominée pour une suite de fonctions.
6. Intégration terme à terme d'une série de fonctions

2 Probabilités .

1. Ensembles dénombrables et familles sommables :
   (a) définition d'un ensemble dénombrable, au plus dénombrable, les propriétés à connaître sont :
   - Toute partie d'un ensemble au plus dénombrable est au plus dénombrable.
   - Si E est un ensemble dénombrable, alors toute partie infinie de E est aussi dénombrable.
   - Toute réunion finie d'ensembles au plus dénombrables est au plus dénombrable.
   - Le produit cartésien de deux ensembles dénombrables est dénombrable.
   - $\mathbb{Q}, \mathbb{Z}$ sont dénombrables, $\mathbb{R}$ n'est pas dénombrable car il existe des parties non dénombrables.
2. Probabilité :
   (a) Le vocabulaire autour des probas ; Univers,éventualité,tribu, Événements, événement certain, impossible, élémentaire, contraires,incompatible, indépendant, définition d'un système complet d'événements, *savoir traduire les événements en réunion , intersection d'autres événements ou leurs contraires*
   (b) Probabilité : Définition et les propriétés usuelles.savoir à partir d'une suite (p_n), justifier qu'il existe une unique probabilité sur $(\Omega, \mathscr{P}(\Omega))$ où $\Omega = \{\omega_n / n \in I\}$ avec I partie de $\mathbb{N}$.
   (c) Propriété de continuité monotone.
   (d) Probabilité conditionnelle : événements indépendants
   (e) **Démonstration des Formules des proba. composées,totales, de Bayes**

3 Exercices à savoir refaire

Ces exercices sont les exemples traités en cours ou dl6.

Exercice 1. (revoir dl6) On considère les deux fonctions suivantes :

$$\zeta : x \longmapsto \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^x}$$

$$\mu : x \longmapsto \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^x}$$

1. Montrer que : $\forall x > 1, \mu(x) = (1 - 2^{1-x})\zeta(x)$.(*regrouper les termes pairs et impairs dans les sommes partielles*).

2. (a) Montrer que :

$$\forall x > 0, -1 + 2\mu(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n+1} \left[\frac{1}{n^x} - \frac{1}{(n+1)^x} \right]$$

(b) En déduire :

$$\forall x > 0, \frac{1}{2} \leq \mu(x) \leq 1 - \frac{1}{2^{x+1}}$$

(c) En déduire $\lim\limits_{x \to 0^+} \mu(x)$.

3. (a) Justifier que :

$$\forall x > 1, \forall n \geq 2, \int_n^{n+1} \frac{dt}{t^x} \leq \frac{1}{n^x} \leq \int_{n-1}^{n} \frac{dt}{t^x}$$

(b) En déduire : $\forall x > 1, \dfrac{1}{x-1} \leq \zeta(x) \leq 1 + \dfrac{1}{x-1}$.

(c) En déduire un équivalent de $\zeta(x)$ quand x tend vers 1^+.

(d) Retrouver ce résultat en utilisant la relation du 1.

Exercice 2. (revoir dl6)

1. Donner l'ensemble de définition D de $\mu : x \mapsto \sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^x}$.
2. Montrer que μ est continue sur D.
3. En utilisant un théorème et un raisonnement par l'absurde, démontrer que $\sum\limits_{n \geq 1} \dfrac{1}{n^x}$ ne converge pas uniformément sur D.
4. Donner $\lim\limits_{x \to +\infty} \mu(x)$.
5. Montrer que μ est C^∞ sur D. En déduire les variations de μ
6. Représentation graphique de μ.

Exercice 3. 1. Montrer que $\forall x \in]-1, 1[, \operatorname{Arctan} x = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} \dfrac{(-1)^n x^{2n+1}}{2n+1}$.

2. En déduire $\dfrac{\pi}{4} = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} \dfrac{(-1)^n}{2n+1}$.

Exercice 4. 1. Montrer que $\forall x \in]-1, 1[, \ln(1+x) = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} \dfrac{(-1)^n x^{n+1}}{n+1}$.

2. En déduire $\ln(2) = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} \dfrac{(-1)^n}{n+1}$.

Exercice 5. Déterminer $\lim\limits_{n \to +\infty} \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n(t)\, \mathrm{d}t$.

Exercice 6. Déterminer $\lim\limits_{n \to +\infty} \displaystyle\int_0^{+\infty} \left(1 - \frac{t^2}{n}\right)^n \mathrm{d}t$.

Exercice 7. ($\star$) Déterminer $\lim\limits_{n \to +\infty} \displaystyle\int_0^{n} \left(1 + \frac{t^2}{n}\right)^{-n} \mathrm{d}t$.

Exercice 8. Déterminer $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{t^2}{e^t - 1} \mathrm{d}t = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2}{n^3}$.

Exercice 9. : Soit $(x_n)_n$ une suite de réels satisfaisant la relation de récurrence :

$$\forall n \in \mathbb{N}, 2x_{n+2} - 3x_{n+1} + x_n = 0$$

Soit Ω un ensemble dénombrable, noté $\Omega = \{\omega_n / n \in \mathbb{N}\}$.
Existe-t-il une probabilité sur $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega))$ telle que : $\forall n \in \mathbb{N}, x_n = P(\{\omega_n\})$?

Exercice 10. : Soit $a \in]0, 1[$.

1. Démontrer qu'il existe une unique probabilité sur $\mathbb{N}$ telle que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\mathbb{P}(\{n\}) = (1-a)a^n$
2. On considère les deux événements : P : Obtenir un entier pair et I : Obtenir un entier impair. Calculer $\mathbb{P}(P)$ et $\mathbb{P}(I)$. Les évènements sont-ils incompatibles ? indépendants ?

Exercice 11. :Soit Ω un univers et soient A, B, C trois événements de Ω . Traduire en termes ensemblistes (en utilisant uniquement les symboles d'union, d'intersection et de passage au complémentaire, ainsi que A, B et C) les événements suivants :

1. Seul A se réalise.
2. A et B se réalisent, mais pas C.
3. les trois événements se réalisent.
4. au moins l'un des trois événements se réalise.
5. au moins deux des trois événements se réalisent.
6. aucun ne se réalise.

7. au plus l'un des trois se réalise
8. exactement deux des trois se réalisent

Exercice 12. On lance une pièce une infinité de fois. Pour $n \geq 1$, on note A_n l'événement : le n ième lancer amène pile.

1. Décrire en une phrase les événements suivants et calculer leur probabilité

$$B = \bigcap_{i=5}^{+\infty} A_i, C = \bigcup_{i=5}^{+\infty} A_i$$

2. Ecrire à l'aide de A_i l'événement D : On n'obtient plus que des piles à partir d'un certain lancer. Donner sa proba

Exercice 13. Une urne contient une boule blanche et une rouge. On tire une boule, on note sa couleur et on la remet dans l'urne en y ajoutant deux autres boules de la même couleur, puis on répète l'opération. Quelle est la probabilité que les n premières boules tirées soient rouges ?

Exercice 14. : Dans une zone désertique, un animal erre entre trois points d'eau A,B et C.
A l'instant t=0, il se trouve au point A.
Quand il a épuisé l'eau du point où il se trouve, il part avec équiprobabilité rejoindre l'un des deux autres points d'eau.
L'eau du point qu'il vient de quitter se régénère alors.
Soit $n \in \mathbb{N}$.

On note A_n l'événement" l'animal est en A après son $n^{\text{ième}}$ trajet".
On note B_n l'événement" l'animal est en B après son $n^{\text{ième}}$ trajet".
On note C_n l'événement" l'animal est en C après son $n^{\text{ième}}$ trajet".
On pose $P(A_n) = a_n$, $P(B_n) = b_n$ et $P(C_n) = c_n$.

1. (a) Exprimer, en le justifiant, a_{n+1} en fonction de a_n, b_n et c_n.
   (b) Exprimer, de même, b_{n+1} et c_{n+1} en fonction de a_n, b_n et c_n.
2. On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}$.
   (a) Justifier que la matrice A est diagonalisable.
   (b) Prouver que $-\dfrac{1}{2}$ est valeur propre de A et déterminer le sous-espace propre associé.
   (c) Déterminer une matrice P inversible et une matrice D diagonale de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ telles que $D = P^{-1}AP$.
   Remarque : Le calcul de P^{-1} n'est pas demandé.
3. Montrer comment les résultats de la question 2. peuvent être utilisés pour calculer a_n, b_n et c_n en fonction de n.
   Remarque : Aucune expression finalisée de a_n, b_n et c_n n'est demandée.

Exercice 15. Pour chaque entier $n \in \mathbb{N}$, on dispose d'une urne U_n ayant $n!$ jetons donc chacun est numéroté. L'expérience aléatoire consiste à choisir un entier k avec une proba de λx^k où $x \in]0,1[$ Une fois cet entier k choisi, on extrait un jeton de l'urne U_k.

1. Comment choisir λ pour disposer d'une probabilité sur $\mathbb{N}$.
2. Quelle est la probabilité de tirer le jeton numéro 1 d'une urne, peu importe l'urne ?
3. A l' issue de l'expérience aléatoire, on a tiré le numéro 1. Quelle est la probabilité qu'il provienne de U_2.