Colle de **mathématiques**

1 Probabilités -Variables aléatoires discrètes-Loi d'une variable aléatoire.

L'étudiant doit connaître :

1. le vocabulaire : Univers, Événements, Variables aléatoires, événement certain, impossible, élémentaire, contraires, la définition d'un système complet d'événements, définition d'une variable aléatoire et des notations $(X \in U)$, $(X = a)$, $(X \leq a)$.
2. savoir traduire les événements en réunion , intersection d'autres événements ou leurs contraires.
3. connaître la définition et propriétés usuelles sur les Probabilités :
4. Énoncé de la Propriété de continuité monotone.
5. Définition d'une Probabilité conditionnelle.
6. Formules des proba. composées, de Bayes, totales avec leurs hypothèses.
7. Définition des Événements indépendants.
8. Définitions, modèles de références, caractéristiques des lois uniforme, Bernoulli, binomiale, géométrique, Poisson .(*Message pour les colleurs : l'approximation de la loi de Poisson par la loi binomiale n'est plus au programme*).
9. Couple de variables aléatoires discrètes : loi conjointe, lois marginales, lois conditionnelles, variables aléatoires indépendantes.
10. La méthode pour obtenir le terme d'une suite arithmético géométrique doit être sue et appliquée sans indication.

2 Séries Entières

L'étudiant doit :

1. Reconnaître une série entière d'une variable réelle ou complexe.
2. Savoir dire que le rayon de convergence R d'une série entière est le réel positif ou $+\infty$ tel que : si $|z| < R$, la série entière converge absolument et la suite $(a_n z^n)_n$ est bornée et si $|z| > R$, la série entière diverge grossièrement et la suite $(a_n z^n)_n$ n'est pas bornée.
3. connaître la définition de l'intervalle ouvert de convergence (pour une variable réelle) et le disque ouvert de convergence (pour une variable complexe) et savoir les représenter graphiquement.
4. savoir déterminer le rayon de convergence :
   — soit par la règle de D'Alembert.
   — soit en trouvant r tel que $\rho < r \Longrightarrow \sum_{n\geq 0} a_n\rho^n$ cv abs et dire que $r \leq R$ et trouver $\rho \geq r$ tel que $\sum_{n\geq 0} a_n\rho^n$ dv grossièrement et dire que $r \geq R$ et conclure $r = R$.
5. Savoir utiliser les propriétés : Soit deux séries entières $\sum_{n\geq 0} a_n\, z^n$ et $\sum_{n\geq 0} b_n\, z^n$ de rayons de convergence respectifs R_a et R_b.

   1. $a_n = O(b_n) \Longrightarrow R_a \geq R_b$.
   2. $a_n \underset{n\to+\infty}{\sim} b_n \Longrightarrow R_a = R_b$.
   3. $\exists N \in \mathbb{N},\ \forall n \geq N, |a_n| \leq |b_n| \Longrightarrow R_a \geq R_b$.
   4. Si R est le rayon de convergence de la série $\sum_{n\geq 0} (a_n + b_n)\, z^n$, alors $R \geq \text{Inf}(R_a, R_b)$.
   Si $R_a \neq R_b$, $R = \text{Inf}(R_a, R_b)$.
   Et $\forall |z| < \text{Inf}(R_a, R_b)$, $\sum_{n=0}^{+\infty} c_n\, z^n = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n\, z^n + \sum_{n=0}^{+\infty} b_n\, z^n$.
   5. Si R est le rayon de convergence de la série produit $\sum_{n\geq 0} c_n\, z^n$ où $c_n = \sum_{k=0}^{n} a_k\, b_{n-k}$, alors $R \geq \text{Inf}(R_a, R_b)$ et
   $\forall |z| < \text{Inf}(R_a, R_b)$, $\sum_{n=0}^{+\infty} c_n\, z^n = \left(\sum_{n=0}^{+\infty} a_n\, z^n\right)\left(\sum_{n=0}^{+\infty} b_n\, z^n\right)$.
   6. Si $\lambda \neq 0$, les séries entières $\sum_{n\geq 0} a_n\, z^n$ et $\sum_{n\geq 0} \lambda a_n\, z^n$ ont même rayon de convergence et $\forall |z| < R_a$, $\sum_{n=0}^{+\infty} \lambda a_n\, z^n = \lambda \sum_{n=0}^{+\infty} a_n\, z^n$.
6. savoir démontrer qu'une série entière à variable réelle converge normalement sur tout segment inclus dans son intervalle ouvert de convergence et de donner un exemple d'une série entière ne convergeant pas normalement sur $]-R, R[$.
7. savoir que la somme S d'une série entière à variable réelle est continue, C^∞ sur $]-\infty, \infty[$, $a_n = \dfrac{S^{(n)}(0)}{n!}$, qu'on peut intégrer terme à terme sur tout segment de $]-R, R[$.
8. deux séries entières sont égales sur un intervalle du type $]-r, r[$ ssi leurs coeffs sont égaux. Conséquence pour une fonction paire, impaire.

9. savoir démontrer qu'une fonction f est C^∞ sur un intervalle du type $]-r, r[$ en montrant qu'elle est la somme d'une série entière sur cet intervalle.
10. la définition d'une fonction développable en série entière, son lien avec la série de Taylor.
11. connaître l'exemple : $f : x \mapsto e^{-\frac{1}{x^2}}$ prolongeable en une fonction C^∞ sur $\mathbb{R}$ mais non développable en série entière.
12. savoir faire la méthode de l'équation différentielle pour obtenir un DSE d'une fonction f : l'exemple $f : x \mapsto (1+x)^\alpha$ où α est un réel indépendant de x.
13. savoir retrouver les DSE de sin, cos , ch, sh, $x \mapsto ln(1 \pm x)$, arctan, arcsin, arccos.
14. connaître parfaitement les DSE de exp, $x \mapsto \frac{1}{1-x}$, cos , sin, ch, sh, $x \mapsto (1+x)^\alpha$.