classes préparatoires scientifiques
Lycée Brizeux

PSI
MATHEMATIQUES **Programme de Colle semaine $n°17$ du 27 Janvier 2025**

CETTE SEMAINE, la colle aura le FORMAT SUIVANT :

1. 2 questions de cours parmi celles proposées ci-dessous.
2. Un premier exercice sur le problème du DS $n°4$ niveau Mines/Centrale pour les groupes 1 et 2 et sur le problème 1 (sur les séries de fonctions) du DS $n°4$ niveau E3A/CCINP pour les autres groupes.
3. Un deuxième exercice portant les séries entières.

1 Questions de cours

1. Énoncé du Théorème de continuité pour les suites ou séries de fonctions
2. Énoncé du Théorème de double limite.
3. Énoncé du Théorème d'intégration sur un segment pour les suites ou séries de fonctions
4. Énoncé du Théorème de dérivation pour les suites de fonctions, pour les séries de fonctions. Généralisation du théorème.
5. Énoncé du Théorème de convergence dominée pour une suite de fonctions.
6. Énoncé du Théorème d' Intégration terme à terme d'une série de fonctions.
7. Propriété de continuité monotone en Probabilités.
8. Formule des Probabilités Totales.
9. Formule des Probabilités Composées.
10. Formule de Bayes.
11. Montrer qu'une série entière d'une variable réelle converge normalement sur tout segment de son intervalle ouvert de convergence.
12. Développement en série entière de $x \mapsto \frac{1}{1 \pm x}$, exp, $x \mapsto \ln(1 \pm x)$.
13. Donner la nature d'une série entière.

2 Séries entières

Les attendus de ce chapitre sont

1. Savoir reconnaître une série entière, attention aux séries lacunaires !
2. Connaître la nature des séries entières à l'intérieur puis l'extérieur du disque ouvert de convergence (ou intervalle ouvert de convergence).
3. Calcul du rayon de convergence :
   (a) Soit appliquer la règle de D'Alembert : attention, interdit d'écrire $R = \frac{1}{l}$, il faut rédiger en deux temps :
   - d'abord je cherche la limite de $\left|\dfrac{a_{n+1}\, z^{n+1}}{a_n\, z^n}\right|$, je trouve
   - soit 0 alors la série entière est toujours absolument cv et $R = +\infty$,
   - soit $+\infty$ alors la série entière est toujours grossièrement dv et $R = 0$,
   - soit $l|z|$, alors cv abs pour $|z| < \frac{1}{l}$, je fais un dessin et je trouve $R \geq \frac{1}{l}$ puis dv grossière pour $|z| > \frac{1}{l}$, je fais un dessin et je trouve $R \leq \frac{1}{l}$ d'où $R = \frac{1}{l}$.
   - Attention aux séries lacunaires ! ! !

   (b) soit des comparaisons entre les rayons de convergence des séries $\sum a_n z^n$ et $\sum b_n z^n$ quand $|a_n| \leq |b_n|, a_n = O(b_n), a_n \sim b_n$.
4. Opérations sur les séries entières et rayon de convergence.
5. Régularité de la fonction somme d'une série entière :
   (a) $S : x \mapsto \sum\limits_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ est C^∞ sur $]-R, R[$ et ses dérivées s'obtiennent en dérivant terme à terme et toutes les séries entières ont même rayon de cv. Puis $\forall n, a_n = \frac{S^{(n)}(0)}{n!}$.

   (b) Les primitives de S sur $]-R, R[$ sont : $x \mapsto k + \sum\limits_{n=0}^{+\infty} a_n \frac{x^{n+1}}{n+1}$. La série entière reste de même rayon de cv.

   (c) Identification de deux séries entières.

   (d) Utilisation d'une série entière pour montrer qu'une application est C^∞. (ex : $x \mapsto \begin{cases} \frac{\ln x}{x-1} & \text{si } x \neq 1 \\ 1 & \text{si } x = 1 \end{cases}$)