classes préparatoires scientifiques Lycée Brizeux

PSI
MATHEMATIQUES **Programme de Colle semaine $n°20$ du 10 Mars 2025**

CETTE SEMAINE, la colle aura le FORMAT SUIVANT :

1. 2 questions de cours parmi celles proposées ci-dessous dont une sur un énoncé des théorèmes sur les intégrales à paramètre
2. Deux exercices parmi la liste ci-dessous.

1 Questions de cours

1. Décrire le modèle des variables suivantes et donner leurs lois : uniforme, Bernoulli, binomiale, géométrique et Poisson .
2. savoir définir les lois conjointe, marginales, conditionnelles de Couple de variables aléatoires discrètes :
3. Démo ($\star$) : X admet une espérance finie si et seulement si la série de terme général $\mathbb{P}(X \geq k)$ converge et dans ce cas,$E(X) = \sum\limits_{k=1}^{+\infty} \mathbb{P}(X \geq k)$.
4. Espérance : définition, Calculer les espérances des variables aléatoires usuelles. Enoncé du théorème de transfert.
5. Variance : définition, Formule de König-Huyghens, calcul des variances des variables aléatoires usuelles.
6. Fonction génératrice de X : définition, déterminer les fonctions génératrices des lois usuelles, la relation entre fonction génératrice d'une somme de deux v.a indépendantes.
7. Enoncés et démonstrations des Inégalités de Markov, Bienaymé-Tchebychev, Loi faible des grands nombres

2 Variables aléatoires discrètes

1. Variables aléatoires, la notation $(X \in U), (X = a)$, opérations .
2. Loi de probabilité d'une v.a.d
   (a) Pour trouver la loi de X, je procède de la manière suivante :
      i. Je donne $X(\Omega)$, c'est à dire toutes les issues possibles. On note $X(\Omega) = \{x_i, i \in I\}$.
      ii. On se donne une issue x_i et je dois calculer $P(X = x_i)$. Pour cela, j'écris $(X = x_i)$ à l'aide d'une réunion, ou/et intersection ou/et contraire d'événements dont il est plus facile d'étudier la proba. et nous amène à utiliser les formules vues au chapitre Espaces probabilisés.
   (b) Comment savoir si X est une v.a lorsqu'on nous donne une suite $(p_n)_n$ telle que $P(X = x_n) = p_n$: je dois montrer que :
   $\forall n \in \mathbb{N}, p_n \geq 0, \sum\limits_{n \geqslant 0} p_n$ converge et $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} p_n = 1$.
   (c) Les lois usuelles : uniforme, Bernoulli, binomiale, géométrique et Poisson .
   (d) Couple de variables aléatoires discrètes : loi conjointe, lois marginales, lois conditionnelles.
   (e) Variables aléatoires indépendantes, mutuellement indépendantes : définitions, la propriété : Soit $(X_i)_{i \in \mathbb{N}}$ une suite de variables aléatoires discrètes mutuellement indépendantes.
      i. Alors, pour toute partie I finie de $\mathbb{N}$, pour toute famille $(A_i)_{i \in I}$ de parties de $(X_i(\Omega))_{i \in I}$,
      $$P(\bigcap_{i \in I} (X_i \in A_i)) = \prod_{i \in I} P((X_i \in A_i))$$
      ii. Soient f et g deux fonctions à plusieurs variables à valeurs dans $\mathbb{R}$ telles que l'on peut définir les variables aléatoires
      $f(X_{i_1}, X_{i_2}, \cdots, X_{i_p})$ et $g(X_{k_1}, X_{i_2}, \cdots, X_{k_q})$ où $\{i_1, \cdots, i_p\} \cap \{k_1, \cdots, k_q\} = \emptyset$.
      $f(X_{i_1}, X_{i_2}, \cdots, X_{i_p})$ et $g(X_{k_1}, X_{k_2}, \cdots, X_{k_q})$ sont indépendantes.
   (f) Espérance : définition, pour une variable aléatoire discrète à valeurs dans $\mathbb{N}$, X admet une espérance finie si et seulement si la série de terme général $P(X \geq k)$ converge et dans ce cas, $E(X) = \sum\limits_{k=1}^{+\infty} P(X \geq k)$, linéarité de l'espérance, positivité, croissance, espérance d'un produit de deux variables indépendantes.
   (g) Variance : définition, **Formule de König-Huyghens,** $V(aX + b) = a^2 V(X)$**, variance des variables aléatoires usuelles**.
   (h) Définition de la covariance de deux v.a.d admettant des moments d'ordre 2 et les propriétés : Inégalité de Cauchy-Schwarz. $Cov(X, X) = V(X), Cov(X, Y) = Cov(Y, X), Cov(X + Y, Z) = Cov(X, Z) + Cov(Y, Z), Cov(aX, bY) = abCov(X, Y)$ .Si X et Y sont indépendantes, alors $Cov(X, Y) = 0$ mais la réciproque est fausse. $V(X+Y) = V(X)+V(Y)+2Cov(X, Y)$. Si X et Y sont indépendantes, $V(X+Y) = V(X)+V(Y)$ et généralisation pour une famille de v.a.d mutuellement indépendantes.
   (i) Fonction génératrice de X : définition, propriété : caractère C^∞ sur $]-1, 1[$, lien avec les dérivées successives en 0 et la loi de probabilité de X, Comment retrouver l'espérance et la variance à partir de G_X, fonction génératrice des lois usuelles, fonction génératrice d'une somme de deux v.a indépendantes, La somme de deux variables aléatoires suivant une loi de Poisson suit une loi de Poisson.
   (j) Inégalités de Markov, Bienaymé-Tchebychev, Loi faible des grands nombres :**Enoncés et démonstrations**

3 Intégrales à paramètre

Vous devez savoir énoncer et appliquer les théorèmes suivants :

1. *Théorème de continuité des intégrales à paramètre* :
   Soit I et J deux intervalles de $\mathbb{R}$ et $f \in \mathscr{F}(I \times J, \mathbb{K})$.
   On suppose :
   1. $\forall t \in J, x \longmapsto f(x,t)$ est continue sur I.
   2. $\forall x \in I, t \longmapsto f(x,t)$ est continue par morceaux sur J.
   3. *Hypothèse de domination* :
   — soit globale : $\exists \varphi$ intégrable sur J et à valeurs positives, telle que :
   $$\forall (x,t) \in I \times J, |f(x,t)| \leq \varphi(t)$$
   — soit locale : $\forall K = [a,b]$ segment inclus dans I, $\exists \varphi_K$ intégrable sur J et à valeurs positives, telle que :
   $$\forall (x,t) \in [a,b] \times J, |f(x,t)| \leq \varphi_K(t)$$
   Alors,
   $$g : \begin{array}{ccc} I & \longrightarrow & \mathbb{K} \\ x & \longmapsto & \int_J f(x,t)\,\mathrm{d}t \end{array} \text{ est continue sur } I.$$
2. *Théorème de dérivabilité des intégrales à paramètre*, appelé aussi *Théorème de Leibniz* :
   Soit I et J deux intervalles de $\mathbb{R}$ et $f \in \mathcal{F}(I \times J, \mathbb{K})$.
   On suppose :
   1. $\forall x \in I, t \longmapsto f(x,t)$ est continue par morceaux et intégrable sur J.
   2. $\forall t \in J, x \longmapsto f(x,t)$ est C^1 sur I.
   Sa dérivée est notée $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ et est à nouveau considérée comme fonction de deux variables :
   3. $\forall x \in I, t \longmapsto \dfrac{\partial f}{\partial x}(x,t)$ est continue par morceaux sur J.
   4. *Hypothèse de domination* :
   — soit globale : $\exists \varphi$ intégrable sur J et à valeurs positives, telle que :
   $$\forall (x,t) \in I \times J, |\frac{\partial f}{\partial x}(x,t)| \leq \varphi(t)$$
   — soit locale : $\forall K = [a,b]$ segment inclus dans I, $\exists \varphi_K$ intégrable sur J et à valeurs positives, telle que :
   $$\forall (x,t) \in K \times J, |\frac{\partial f}{\partial x}(x,t)| \leq \varphi_K(t)$$
   Alors,
   $$g : \begin{array}{ccc} I & \longrightarrow & \mathbb{K} \\ x & \longmapsto & \int_J f(x,t)\,\mathrm{d}t \end{array} \text{ est de classe } C^1 \text{ sur } I \text{ et}$$
   $$\forall x \in I, g'(x) = \int_J \frac{\partial f}{\partial x}(x,t)\,\mathrm{d}t$$
3. Soit un entier k supérieur ou égal à 1.
   On suppose :
   1. $\forall x \in I, t \longmapsto f(x,t)$ est continue par morceaux et intégrable sur J.
   2. $\forall t \in J, x \longmapsto f(x,t)$ est de classe C^k sur I.
   Ses dérivées successives sont notées $\dfrac{\partial^i f}{\partial x^i}$ où $1 \leq i \leq k$ et est à nouveau considérée comme fonction de deux variables
   3. $\forall 1 \leq i \leq k-1,\ \forall x \in I, t \longmapsto \dfrac{\partial^i f}{\partial x^i}(x,t)$ est continue par morceaux et intégrable sur J .
   4. $\forall x \in I, t \longmapsto \dfrac{\partial^k f}{\partial x^k}(x,t)$ est continue par morceaux sur J .
   5. *Hypothèse de domination* :
   — soit globale : $\exists \varphi$ intégrable sur J et à valeurs positives, telle que :
   $$\forall (x,t) \in I \times J, |\frac{\partial^k f}{\partial x^k}(x,t)| \leq \varphi(t)$$
   — soit locale : $\forall K$ segment inclus dans I, $\exists \varphi_K$ intégrable sur J et à valeurs positives, telle que :
   $$\forall (x,t) \in K \times J, |\frac{\partial^k f}{\partial x^k}(x,t)| \leq \varphi_K(t)$$
   Alors,
   $$g : \begin{array}{ccc} I & \longrightarrow & \mathbb{K} \\ x & \longmapsto & \int_J f(x,t)dt \end{array} \text{ est de classe } C^k \text{ sur } I \text{ et}$$
   $$\forall 1 \leq i \leq k,\ \forall x \in I, g^{(i)}(x) = \int_J \frac{\partial^i f}{\partial x^i}(x,t)dt$$

4. *Théorème de convergence dominée à paramètre continu*
Soit I et J deux intervalles de $\mathbb{R}$ et $f \in \mathcal{F}(I \times J, \mathbb{K})$, a un élément ou une borne finie ou non de I .
On suppose :
1. $\forall x \in I, t \longmapsto f(x,t)$ est continue par morceaux sur J.
2. $\forall t \in J, \lim\limits_{x \to a} f(x,t) = l(t)$.
3. $\forall x \in I, t \mapsto l(t)$ est continue par morceaux sur J.
4. *Hypothèse de domination* : $\exists \varphi$ intégrable sur J et à valeurs positives, telle que :

$$\forall (x,t) \in I \times J, |f(x,t)| \leq \varphi(t)$$

l est intégrable sur J et

$$\lim_{x \to a} \int_J f(x,t)\,\mathrm{d}t = \int_J l(t)\,\mathrm{d}t$$

On retiendra trois méthodes pour trouver une limite d'une fonction définie par une intégrale à paramètre :
— Encadrement et théorème des gendarmes.
— Changement de variable pour faire sortir le paramètre de l'intégrale et équivalent
— théorème de convergence dominé à paramètre continu. (parfois cette méthode est appliquée après la précédente)

4 Exercices à savoir refaire

Ce sont les exemples de mon cours.

Exercice 1. Trouver $\lambda > 0$ pour que les réels $p_n = \frac{\lambda}{n!}$ pour $n \in \mathbb{N}$ peuvent définir la loi d'une variable aléatoire sur un espace probabilisé.

Exercice 2. Une urne de contenance illimitée contient initialement deux boules blanches et une boule noire. On effectue des tirages successifs suivant le protocole suivant : on tire une boule puis on la remet dans l'urne et on ajoute dans l'urne une boule blanche et une boule noire. Soit X égale au rang d'apparition de la première boule blanche. Donner la loi de X.

Exercice 3. Considérons une v.a.d X dont la loi est donnée par :
- $X(\Omega) = \{-1, -2, 0, 1, 2\}$.
-

X	-1	-2	0	1	2
$\mathbb{P}(X = k)$	$0,23$	$0,15$	$0,35$	$0,09$	$0,18$

Donner les lois de X^2 et de $(-1)^X$.

Exercice 4. Une urne contient des jetons numérotés de 1 à n. On les tire un à un sans remise jusqu'à obtenir le jeton $n^\circ 1$. On note X le nombre de tirages ainsi effectués. Montrer que X suit une loi uniforme.

Exercice 5. Une urne contient a boules blanches et b boules noires. On en tire n simultanément. On suppose que les boules blanches sont numérotées de 1 à a. pour $i \in [\![1, a]\!]$, on définit $X_i = 1$ si la boule blanche $n^\circ i$ est tirée et 0 sinon.
Justifier que X_i est une variable de Bernoulli et déterminer son paramètre

Exercice 6. Soit N clients se présentant devant m caisses d'un magasin. On suppose que chaque client choisit une caisse au hasard indépendamment des autres clients. Soit la v.a X égale au nombre de clients se présentant à la caisse 1. Montrer que X suit une loi binomiale et déterminer ses paramètres.

Exercice 7. Trois personnes jouent aux dés : elles lancent un dé, une fois chacune et cela constitue une manche. Si l'une sort le 6 et que les autres ne l'obtiennent pas, alors elle est déclarée gagnante et le jeu s'arrête. Sinon, on recommence.
1. Quelle est la probabilité qu'une manche amène un vainqueur.
2. Soit X, le nombre de manches jouées lorsque le jeu s'arrête. Déterminer la loi de X.

Exercice 8. On effectue une suite infinie de lancers d'une pièce équilibrée. On note X (resp : Y) la variable aléatoire égale au rang d'apparition du premier pile (resp : face). Déterminer la loi conjointe de (X, Y) puis les lois marginales

Exercice 9. Une poule pond N œufs où N suit une loi de Poisson de paramètre λ. Chaque œuf éclot avec une probabilité $p \in]0,1[$ et les éclosions sont des événements indépendants. On note K le nombre de poussins.
1. Soit $n \in \mathbb{N}$. Donner la loi conditionnelle de K sachant $N = n$.
2. En déduire la loi de K.

Exercice 10. On réalise une répétition indépendante d'expériences de Bernoulli de paramètre $p \in]0,1[$. On note X_1 égale au rang du premier succès, X_2 égale au rand du second succès et $T = X_2 - X_1$.
1. Déterminer la loi de X_1.
2. Déterminer la loi du couple (X_1, X_2).
3. Déterminer la loi de T. (X_1, T) sont-elles indépendantes ?
4. Déterminer la loi de X_2. (X_1, X_2) sont-elles indépendantes ?

On note , pour tout $n \in \mathbb{N}^*, p_n = \frac{1}{n 2^n \ln 2}$.

Exercice 11. 1. Montrer que $(n, p_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est la loi d'une probabilité d'une v.a.d X.
2. X admet-elle une espérance ? Si oui, la calculer.
3. Reprendre les deux questions précédentes avec $p_n = \frac{1}{(n+1)(n+2)}$.

Exercice 12. Montrer que La somme de deux variables aléatoires suivant une loi de Poisson suit une loi de Poisson.

Exercice 13. On lance un dé cubique parfait. Combien faut-il de lancers pour pouvoir affirmer avec un risque d'erreur inférieur à 5 pour cent que la fréquence d'apparition de l'as au cours de ces lancers différera de $\frac{1}{6}$ d'au plus $1/100$.

Exercice 14. La Fonction Gamma Γ : On définit la fonction Γ par

$$\Gamma : x \longmapsto \int_0^{+\infty} t^{x-1} e^{-t} \, \mathrm{d}t$$

1. Γ est définie et continue sur $]0, +\infty[$
2. $\forall x > 0, \Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$
3. $\forall n \in \mathbb{N}, \displaystyle\int_0^{+\infty} t^n e^{-t} \mathrm{d}\, t = n!$
4. Γ est C^∞ sur $]0, +\infty[$.
5. Justifier que Γ est convexe.
6. Calculer $\Gamma(1)$ et $\Gamma(2)$. Qu'en déduit-on ?
7. Donner un équivalent de $\Gamma(x)$ quand $x \to 0^+$.
8. Donner le tableau de variations de Γ.
9. En déduire $\displaystyle\lim_{x \to +\infty} \Gamma(x)$.

Exercice 15. Calcul de $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-t^2} \mathrm{d}\, t$ On pose $f(x) = \displaystyle\int_0^x e^{-t^2} \mathrm{d}\, t$ et $g(x) = \displaystyle\int_0^1 \frac{e^{-x^2(1+t^2)}}{1+t^2} \mathrm{d}\, t$

1. Montrer que f et g sont C^1 sur $\mathbb{R}^+$.
2. Déterminer $\displaystyle\lim_{x \to +\infty} g(x)$.
3. Montrer $x \mapsto (f(x))^2 + g(x)$ est constante sur $\mathbb{R}^+$.
4. En déduire la valeur de $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-t^2} \mathrm{d}\, t$
5. En déduire $\Gamma(\frac{1}{2})$.

Exercice 16. Soit f continue sur $\mathbb{R}$. Justifier que $F : x \mapsto \int_0^x \cos(x+t) f(t) \mathrm{d}\, t$ est C^1 sur $\mathbb{R}$ et calculer sa dérivée.

Exercice 17. Une transformée de Laplace : On pose $\forall x > 0, L(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{e^{-xt}}{\sqrt{t}} \mathrm{d}\, t$.

1. Montrer que L est C^1 sur $\mathbb{R}_*^+$.
2. Déterminer $\displaystyle\lim_{x \to +\infty} L(x)$.
3. Donner un équivalent de $L(x)$ quand $x \to 0^+$ pour en déduire sa limite en 0^+.