Colle de **mathématiques**

1 Espaces préhilbertiens réels et euclidiens

Les attendus de ce chapitre sont :

1. Savoir démontrer qu'une application est un produit scalaire.
2. Connaître l'inégalité de Cauchy-Schwarz et **sa démonstration**.
3. Les identités de polarisation.
4. Connaître les produits scalaires canoniques sur $\mathbb{R}^n$, $\mathbb{R}_n[X]$, $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$, $\mathscr{C}([a,b],\mathbb{R})$.
5. Définition de deux vecteurs orthogonaux, d'une famille orthogonale, orthonormale.
6. La définition de $F^\perp$ sous les deux formes :
$$F^\perp = \{x \in E / \forall y \in F, < x, y >= 0\}$$
Si F un s.e.v de E de dimension finie, muni d'une base $(f_i)_{i\in\{1..p\}}$.
Alors
$$F^\perp = \{x \in E / \forall i \in \{1..p\}, < x, f_i >= 0\}$$
7. Théorème de Pythagore.
8. **Toute famille orthogonale finie de vecteurs non nuls est libre.**
9. Soit E muni d'une b.o.n $(e_i)_{i\in\{1..n\}}$. On a :
$$\forall x \in E, x = \sum_{i=1}^{n} < e_i, x > e_i = \begin{pmatrix} < e_1, x > \\ \vdots \\ < e_n, x > \end{pmatrix}$$
$$\forall x \in E, \|x\| = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} |x_i|^2}$$
où $x_i =< e_i, x >$.
$$\forall (x,y) \in E \times E, < x, y >= \sum_{i=1}^{n} x_i\, y_i$$
où $x_i =< e_i, x >$ et $y_i =< e_i, y >$.
Autrement dit, le produit scalaire associé à cette b.o.n se comporte comme le produit scalaire canonique de $\mathbb{R}^n$
10. Soit E un espace préhilbertien réel.
Soit F un *sev de dimension finie*, alors $E = F \oplus F^\perp$ et $F^\perp$ s'appelle un supplémentaire orthogonal de F dans E.
11. Définition du projecteur orthogonal sur un sev de F et les deux méthodes pour obtenir $p_F(x)$ où $x \in E$ quand F un *sev de dimension finie*,
    — Ou bien : on a (ou il est facile d'obtenir) une b.o.n de F,$(f_i)_{i\in\{1..p\}}$.
    Alors $\forall x \in E,\ p_F(x) = \sum_{i=1}^{p} < f_i, x > f_i$.
    — Ou bien : on dispose d'une base **quelconque** $(f_i)_{1\le i\le p}$ de F, alors pour déterminer $p_F(x)$, on résoudra un système linéaire en posant :
    $p_F(x) = \sum_{i=1}^{p} a_i f_i$ et $(a_i)_i$ correspondent aux inconnues à déterminer. Ceci vient du fait que $p_F(x) \in F$.
    Puis on traduit que $x - p_F(x) \in F^\perp$ en écrivant les équations :
    $$\forall j \in [\![1,p]\!], < x - p_F(x), f_j >= 0$$
    Cela revient à résoudre en un système à p inconnues et p équations .
12. Savoir orthonormaliser une famille libre par le procédé de Gram-Schmidt.
13. Définition et calcul de la distance d'un vecteur à un sev : $d(x,F) = \mathrm{Inf}\{\|x-y\| / y \in F\}$ et Si F est de dimension finie, $d(x,F) = \|x - p_F(x)\| = \|p_{F^\perp}(x)\|$ et $(d(x,F))^2 = \|x\|^2 - \|p_F(x)\|^2$

2 Isométries vectorielles et Matrices orthogonales

Les attendus de ce chapitre sont :

1. Donner la définition d'une isométrie vectorielle et donner ses deux autres caractérisations.
2. **une isométrie vectorielle est un automorphisme et son spectre est inclus dans** $\{-1,1\}$
3. Définition d'une matrice orthogonale et ses différentes caractérisations.
4. **Le déterminant d'une matrice orthogonale est** ± 1