classes préparatoires scientifiques Lycée Brizeux

PSI

MATHEMATIQUES **Programme de Colle semaine $n°21$ du 17 Mars 2025**

CETTE SEMAINE, la colle aura le FORMAT SUIVANT :

1. 1 question de cours parmi celles proposées .
2. Un exercice reprenant des questions sur les quatre exercices du dernier DS.
3. Un exercice sur les espaces préhilbertiens et euclidiens.

1 Questions de cours

1. Soit f une isométrie vectorielle d'un espace euclidien (c'est-à-dire endomorphisme conservant la norme). Montrer que f est une isométrie vectorielle d'un espace euclidien ssi f conserve le produit scalaire.
2. Toute isométrie vectorielle est un automorphisme.
3. L'application réciproque d'une isométrie vectorielle est une isométrie vectorielle.
4. La composée d'isométries vectorielles reste une isométrie vectorielle.
5. $Sp_{\mathbb{R}}(f) \subset \{-1, 1\}$.
6. Soit F un s.e.v stable par f alors $F^{\perp}$ est stable par f.

2 Espaces préhilbertiens réels et espaces euclidiens

Dans ce chapitre , vous devez savoir :

1. Comment montrer qu'une application est un produit scalaire,l' inégalité de cauchy Schwarz, cas de l'égalité, la définition de la norme associée, les identités de polarisation.
2. Exemples de référence : produit scalaire euclidien canonique sur $\mathbb{R}^n$, sur un espace de de dimension fini, produit scalaire $< A, B >\mapsto \operatorname{tr}(A^T B)$ sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, produits scalaires définis par une intégrale sur $\mathcal{C}^0([a, b], \mathbb{R})$.
3. définition de vecteurs orthogonaux, famille orthogonale, orthonormale, vecteur orthogonal à un sev, orthogonal d'un sev.
4. Caractérisation de l'orthogonal d'un sev dans le cas où celui-ci est de dimension finie (à connaître absolument).
5. Théorème de Pythagore.
6. Toute famille orthogonale de vecteurs non nuls est libre. Définition d'une b.o.n. Expression des coordonnées d'un vecteur dans une b.o.n, d'un produit scalaire, de la norme (finalement dans un espace euclidien dans une b.o.n , le produit scalaire et la norme ont les mêmes expressions que le produit scalaire canonique dans $\mathbb{R}^n$)
7. Supplémentaire orthogonaux : définition, Tout sev d'un espace euclidien admet un supplémentaire orthogonal, existence de b.o.n dans un euclidien, tout sev de dim finie dans un préhilbertien admet un supplémentaire orthogonal.
8. Projecteur orthogonal sur un sev de dim finie dans un préhilbertien : définition . Expression de $P_F(x)$ quand on connaît une b.o.n de F (à connaître absolument)
9. Procédé d'orthonormalisation de Gram-Schmidt à savoir appliquer.
10. Distance d'un vecteur à un sev : définition et expression dans le cas où F est de dimension finie.
11. Formes linéaires sur un espace euclidien : Théorème de représentation des formes linéaires : En dimension finie, toute forme linéaire est représentée par un produit scalaire.