Colle de **mathématiques**

ATTENTION : *Une colle sera du type d'un oral de **CCINP**, à savoir deux exercices. Au cours de ces exercices, des questions de cours (du type énoncé d'une propriété ou d'une définition) devront vous être posées. Si , dans le programme de colle, il apparaît des démonstrations à connaître **signalées en gras**, elles pourront vous être demandées en début de colle.*
• ***Comment préparer une colle ?*** *: Une colle se prépare en ayant en mémoire parfaitement le cours ainsi que les exemples et applications directes inclus dans le cours et T.D.*
• ***Notation*** *: Dès lors qu'il s'avère que le cours n'est pas su, la note sera obligatoirement inférieure à 8. Ensuite, les points seront rajoutés suivant votre autonomie face aux exercices.*
• ***Après la colle*** *: Je vous demande de rédiger sur un cahier les exercices que vous avez eus en tenant compte des indications et remarques éventuelles de votre colleur.Je récupèrerai les cahiers de colle le mardi de la semaine suivante à votre colle*
N'hésitez pas à venir me poser des questions*. L'intérêt pour vous est de retenir et d'avoir appris quelque chose de votre colle, d'enrichir vos TD d'exercices supplémentaires que vous pourrez revoir avant vos devoirs surveillés, pendant les devoirs maison, avant les concours*

1 Hyperplan

1. Définition :Si H est un sev de E, H hyperplan de E lorsque il existe une droite vectorielle D supplémentaire de H dans E.
2. Propriétés :
   (a) H est un hyperplan de E ssi il existe une forme linéaire φ sur E non nulle telle que $H = \ker \varphi$.
   (b) Lorsque H est un hyperplan, $\text{Vect}(a)$ où $a \notin H$ est une droite supplémentaire de H dans E.
   (c) Si E est de dimension finie, H est un hyperplan de E ssi $\dim H = \dim E - 1$.
   (d) Équation d'un hyperplan dans une base de E.

2 Compléments d'algèbre linéaire

Acquis requis : Toute l'algèbre linéaire de PCSI

1. Produit d'espaces vectoriels : définition, dimension d'un produit de sev de dimension finie.
2. Matrice par blocs, produit de telles matrices, Caractérisation du rang d'une application linéaire par une matrice par bloc et son écriture matricielle.
3. Matrices semblables : définition, interprétation à l'aide d'un endomorphisme, Deux matrices semblables ont même déterminant et même rang mais la réciproque est fausse.
4. Sous espaces stables : définition, exemples, **Si f et g sont deux endos qui commutent,** $\forall \lambda \in \mathbb{K}, \ker(f - \lambda Id_E)$ **et** $\text{Im}\, f$ **sont stables par** g.
5. Trace d'une matrice carrée : définition, **linéarité, $\mathbf{tr}(\mathbf{AB}) = \mathbf{tr}(\mathbf{BA}), \mathbf{tr}(\mathbf{A}) = \mathbf{tr}(\mathbf{A^T})$, deux matrices semblables ont même trace**.
6. Trace d'un endomorphisme : définition, traduction des prop de la trace d'une matrice. **La trace d'un projecteur est égale à son rang**.
7. Polynômes de Lagrange associés à un (n+1)-uplet de scalaires 2 à 2 distincts : **Définition, la famille forme une base de $\mathbb{K}_n[X]$, coordonnées d'un polynôme dans cette base. Étant donné un (n+1)-uplet de scalaires** $(\lambda_0, \cdots, \lambda_n)$**, trouver le polynôme tel que** $\forall i, P(a_i) = \lambda_i$.
8. Matrice et Déterminant de Vandermonde : Définitions, interprétation à l'aide des polys de Lagrange, **Expression factorisée du déterminant**.

3 Séries numériques

1. Bien faire la différence de notations entre une série, une somme partielle, la suite des termes généraux, la somme de la série.
2. Définition de la convergence ou divergence.
3. **Nature et somme des Séries géométriques, Divergence de la Série Harmonique, Nature et somme de la série harmonique alternée**, séries exponentielles.
4. Déterminer la nature d'une série et calcul éventuel de la somme dans les cas où on peut calculer la somme partielle (utilisation éventuelle d'une décomposition en éléments simples), ou en se référant aux séries précédemment citées.