PSI
MATHEMATIQUES **Programme de Colle semaine $n°3$ du 23 Septembre 2024**

- Une colle sera du type d'un oral de **CCINP**, à savoir deux exercices :
  - Le premier exercice doit contenir :
    - Une question de cours (un énoncé d'une définition, d'une propriété ou d'un théorème) ou une démonstration qui sera **signalée en gras** dans le programme de colle.
      Deux niveaux de démonstration : niveau ($\star$) pour les volontaires.
    - Une application très directe du cours :
  - Un deuxième exercice portant sur une notion du programme de colle différente du premier exercice.
- **Comment préparer une colle ?** Il est indispensable de connaître son cours, savoir refaire les exemples traités en cours et les exercices mentionnés dans le programme de colle.

- **Notation** : Dès lors qu'il s'avère que le cours n'est pas su, la note sera obligatoirement inférieure à 8.
  Ensuite, les points seront rajoutés suivant votre autonomie face aux exercices.

- **Après la colle** : Avant le vendredi de la semaine suivant votre colle, vous devez me rendre votre cahier de colle où vous rédigerez au moins un des deux exercices

1 Compléments d'algèbre linéaire

1.1 Matrices semblables

Savoirs attendus :

1. Définition
2. Caractérisation à l'aide d'un endomorphisme.
3. **Deux matrices semblables ont même rang, même déterminant mais réciproque fausse**
4. La méthode pratique pour montrer que deux matrices sont semblables : Je considère l'une comme la matrice dans la base canonique de $\mathbb{K}^n$ d'un endo f et je montre que l'autre est la matrice de ce même endo dans une base différente que je cherche.

1.2 Sous espace stable par un endomorphisme

Savoirs attendus :

1. Définition d'un sev stable par $u \in \mathscr{L}(E)$ et de l'endomorphisme de F induit par u.
2. La méthode de rédaction pour montrer qu'un sev est stable par $u \in \mathscr{L}(E)$.
3. **Si f et g sont deux endomorphismes qui commutent, alors**
   (a) $\forall \lambda \in \mathbb{K}, \ker(f - \lambda Id)$ **(resp :** $\ker(g - \lambda Id)$**) est stable par** g **(resp : par** f**)**
   (b) Le noyau et L'image de l'un sont stables par l'autre.

1.3 Trace

Savoirs attendus :

1. Définition d'une matrice carrée et d'un endomorphisme.
2. **L'application Tr est une forme linéaire non nulle, $\mathbf{tr}(\mathbf{AB}) = \mathbf{tr}(\mathbf{BA})$, deux matrices semblables ont même trace**.
3. **Si p est un projecteur, $\mathbf{tr}(p) = \mathbf{rg}(p)$**

1.4 Interpolation de Lagrange

Savoirs attendus :

1. Définition de la famille des polynômes d'interpolation de Lagrange associé à un $n+1$-uplet de scalaires deux à deux distincts.
2. **Cette famille est une base de $\mathbb{K}_n[X]$ et coordonnées d'un polynôme P dans cette base**.

1.5 Déterminant de Vandermonde

Savoirs attendus :

1. Savoir définir une matrice de Vandermonde.
2. Savoir que lorsque les scalaires sont deux à deux distincts, elle correspond à la matrice de passage d'une base de polynômes de Lagrange vers la base canonique de $\mathbb{R}_{n-1}[X]$.
3. **connaître le déterminant et savoir le démontrer quand c'est demandé**

1.6 Exercice à connaître

Exercice 1. Soit $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_4(\mathbb{R})$ et $B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_4(\mathbb{R})$

Calculer A^2 et B^2.
A et B sont-elles semblables ?

Exercice 2. Soit M une matrice non nulle de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ telle que $M^2 = 0$.
Calculer les dimensions de $\operatorname{Im} M$ et $\operatorname{Ker} M$. Montrer que M est semblable à $E_{1,3}$.

Exercice 3. Soit u un endomorphisme d'un $\mathbb{K}$-ev de dimension finie, tel que $u^3 + u = 0$

1. Pour $x \in \operatorname{Im} u$, calculer $u^2(x)$.
2. Soit v l'endomorphisme induit par u sur $\operatorname{Im} u$. Montrer que v est un isomorphisme.
3. Montrer que le rang de u est un entier pair

Exercice 4. Soit $H \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ une matrice de rang 1.

1. Montrer que H est le produit d'une matrice colonne et d'une matrice ligne et en déduire que $H^2 = Tr(H)H$.
2. Dans quels cas $A = I_n + H$ est-elle inversible ? Dans l'affirmative, donner A^{-1}.

Exercice 5. Montrer qu'il existe un unique polynôme P de $\mathbb{R}_3[X]$ tel que :
$P(-1) = 1, P(2) = -1, P(4) = 3, P(10) = 2$. L'exprimer.

Exercice 6.

1. Montrer que :$\forall k \in \{0, .., n\}, X^k = \sum_{i=0}^{n} a_i^k L_i$.
2. En déduire que $1 = \sum_{i=0}^{n} L_i$ et que la somme des coefficients de chaque ligne de la matrice de passage de la base canonique à la base des polynômes de Lagrange de $\mathbb{R}_n[X]$.
3. Soit n un entier naturel et $(a_0, a_1, \cdots, a_n) \in \mathbb{R}^{n+1}$ **deux à deux distincts** et $\mathcal{B} = (L_i)_{i \in \{0..n\}}$ la base de $\mathbb{R}_n[X]$ des polynômes d'interpolation de Lagrange associés.

   Pour $m \in \{0, 2, \cdots, n\}$, donner la valeur de $s_m = \sum_{k=0}^{n} a_k^m L_k(0)$.

Exercice 7. Calculer, pour $(a, b, c, d) \in \mathbb{K}^4$, $\begin{vmatrix} 1 & a & a^2 & a^4 \\ 1 & b & b^2 & b^4 \\ 1 & c & c^2 & c^4 \\ 1 & d & d^2 & d^4 \end{vmatrix}$.