classes préparatoires scientifiques
Lycée Brizeux

PSI
MATHEMATIQUES **Programme de Colle semaine $n°4$ du 30 Septembre 2024**

- Une colle sera du type d'un oral de **CCINP**, à savoir deux exercices :
  — Le premier exercice doit contenir :
    — Une question de cours (un énoncé d'une définition, d'une propriété ou d'un théorème) ou une démonstration qui sera **signalée en gras** dans le programme de colle.
    Deux niveaux de démonstration : niveau ($\star$) pour les volontaires.
    — Une application très directe du cours :
  — Un deuxième exercice portant sur une notion du programme de colle différente du premier exercice.
- **Comment préparer une colle ?** Il est indispensable de connaître son cours, savoir refaire les exemples traités en cours et les exercices mentionnés dans le programme de colle.

- **Notation** : Dès lors qu'il s'avère que le cours n'est pas su, la note sera obligatoirement inférieure à 8. Ensuite, les points seront rajoutés suivant votre autonomie face aux exercices.

- **Après la colle** : Avant le vendredi de la semaine suivant votre colle, vous devez me rendre votre cahier de colle où vous rédigerez au moins un des deux exercices

1 Compléments d'algèbre linéaire

1.1 Interpolation de Lagrange

Savoirs attendus :

1. Définition de la famille des polynômes d'interpolation de Lagrange associé à un $n+1$-uplet de scalaires deux à deux distincts.
2. **Cette famille est une base de $\mathbb{K}_n[X]$ et coordonnées d'un polynôme P dans cette base**.

1.2 Déterminant de Vandermonde

Savoirs attendus :

1. Savoir définir une matrice de Vandermonde.
2. Savoir que lorsque les scalaires sont deux à deux distincts, elle correspond à la matrice de passage d'une base de polynômes de Lagrange vers la base canonique de $\mathbb{R}_{n-1}[X]$.
3. **connaître le déterminant et savoir le démontrer quand c'est demandé**

2 Intégration sur un intervalle quelconque

Savoirs attendus :

1. Introduction :
   (a) Définition d'une fonction continue par morceaux sur un segment, sur un intervalle.
   (b) Calcul d'une intégrale continue par morceaux sur un segment.
   (c) Connaître le théorème fondamental de l'intégration vu en PCSI, et savoir qu'il n'est pas applicable pour une fonction continue par morceaux sur un intervalle.
2. Définition d'une intégrale convergente pour une fonction continue par morceaux sur $[a,b[,]a,b],]a,b[$. Relation de Chasles
3. Plan d'étude d'une intégrale dont on demande la nature : *Comment justifier l'existence de* $\displaystyle\int_a^b f(t)\,dt$ *:*
   (a) On commence par se poser la question : f est-elle continue sur $[a,b], [a,b[,]a,b[,]a,b]$?
   (b) Si a et b sont réels et f continue sur $[a,b]$, alors on dit que $\displaystyle\int_a^b f(t)\,dt$ existe en tant qu'intégrale d'une fonction continue sur un segment.

(c) *Dans le cas où f continue sur $[a,b[$ ou $]a,b]$ et a et b sont réels : on étudie la limite de f en la borne impropre.*

i. *Si cette limite est réelle, alors on dit que f se prolonge par continuité en cette borne impropre et $\int_a^b f(t)\,dt$ existe en tant qu'intégrale de son prolongement par continuité sur un segment.*

ii. *Si cette limite n'existe pas (cas de sin ou cos) ou qu'elle est infinie, on se trouve en présence d'une intégrale impropre (ou généralisée) :*

A. *Si on sait calculer $\int_a^x f(t)\,dt$ (si b est la borne impropre) ou $\int_x^b f(t)\,dt$ (si a est la borne impropre), alors on utilise la définition 3 pour savoir si l'intégrale est convergente ou non.*

B. *Sinon on utilisera les critères de ce chapitre pour savoir si elle est convergente (et donc existe) ou divergente (et donc n'existe pas).*

(d) *Dans le cas où a ou b est $\pm\infty$, c'est une intégrale impropre (ou généralisée) :*

i. *Si on sait calculer $\int_a^x f(t)\,dt$ (si $b=+\infty$ est la borne impropre) ou $\int_x^b f(t)\,dt$ (si $a=-\infty$ est la borne impropre), alors on utilise la définition 3 pour savoir si l'intégrale est convergente ou non.*

ii. *Sinon on utilisera les critères de ce chapitre pour savoir si elle est convergente (et donc existe) ou divergente (et donc n'existe pas).*

iii. *On n'étudie qu'une borne impropre à la fois : dans le cas où les deux bornes sont impropres, utiliser Chasles et étudier deux intégrales impropres*

.

4. **Exemples fondamentaux :savoir démontrer nature des intégrales de Riemann, intégrale de l'exp, du ln**.
5. **Savoir énoncer les critères pour les fonctions continues par morceaux à valeurs positives** :

(a) Caractérisation théorique : Soit f continue par morceaux sur $[a,b[$, à valeurs positives.

$$\int_a^b f(t)\,dt \text{ est convergente } \Longleftrightarrow F : x \longmapsto \int_a^x f(t)\,dt \text{ est majorée}$$

(b) Théorème de comparaison : Soit f et g deux fonctions continues par morceaux sur $[a,b[$ et positives tel que :

$$\exists c \in]a,b[, \forall x \in [c,b[, 0 \le f(x) \le g(x)$$

1. Si $\int_a^b g(t)\,dt$ converge, alors $\int_a^b f(t)\,dt$ converge.
2. Si $\int_a^b f(t)\,dt$ diverge, alors $\int_a^b g(t)\,dt$ diverge.

(c) Critère o, O : Soit f et g deux fonctions continues par morceaux sur $[a,b[$, positives sur $[c,b[$, où $c \in]a,b[$. On suppose $f \underset{b}{=} O(g)$ ou $f \underset{b}{=} o(g)$.
Alors

a) Si $\int_a^b g(t)\,dt$ converge, alors $\int_a^b f(t)\;dt$ converge.

b) Si $\int_a^b f(t)\,dt$ diverge, alors $\int_a^b g(t)\,dt$ diverge.

(d) Critère d'équivalence : On suppose $f \underset{b}{\sim} g$.

$$\int_a^b f(t)\,dt \text{ et } \int_a^b g(t)\,dt \text{ ont même nature.}$$

6. **Savoir démontrer la nature d'une intégrale de Bertrand**
7. Fonction d'intégrale nulle : **savoir énoncer le théorème** : Soit f continue, positive sur $[a,b[$ où $a<b$ telle que $\int_a^b f(t)\;dt$ converge.

Alors $\int_a^b f(t)\,dt = 0 \Longleftrightarrow f = 0$.
Savoir l'utiliser pour montrer qu'une application est un produit scalaire (exemple fait en cours).

8. Comparaison série-intégrale : **Savoir énoncer** :

   (a) Soit f continue par morceaux, positive et décroissante sur $[a,+\infty[$.

   Alors $\displaystyle\sum_{n\geq \lfloor a\rfloor+1} f(n)$ est de même nature que $\displaystyle\int_a^{+\infty} f(t)\,dt$.

   (b) Soit f continue par morceaux, positive et décroissante sur $[a,+\infty[$ telle que $\displaystyle\int_a^{+\infty} f(t)\,dt$ diverge.

   Alors
$$\sum_{n=\lfloor a\rfloor+1}^{N} f(n) \underset{N\to+\infty}{\sim} \int_a^N f(t)\,dt$$

2.1 Exercice à connaître

Exercice 1. Montrer qu'il existe un unique polynôme P de $\mathbb{R}_3[X]$ tel que :
$P(-1)=1, P(2)=-1, P(4)=3, P(10)=2$. L'exprimer.

Exercice 2.

1. Montrer que :$\forall k\in\{0,..,n\}, X^k=\displaystyle\sum_{i=0}^{n} a_i^k L_i$.
2. En déduire que $1=\displaystyle\sum_{i=0}^{n} L_i$ et que la somme des coefficients de chaque ligne de la matrice de passage de la base canonique à la base des polynômes de Lagrange de $\mathbb{R}_n[X]$.
3. Soit n un entier naturel et $(a_0,a_1,\cdots,a_n)\in\mathbb{R}^{n+1}$ **deux à deux distincts** et $\mathcal{B}=(L_i)_{i\in\{0..n\}}$ la base de $\mathbb{R}_n[X]$ des polynômes d'interpolation de Lagrange associés.

   Pour $m\in\{0,2,\cdots,n\}$, donner la valeur de $s_m=\displaystyle\sum_{k=0}^{n} a_k^m L_k(0)$.

Exercice 3. Calculer, pour $(a,b,c,d)\in\mathbb{K}^4$, $\begin{vmatrix} 1 & a & a^2 & a^4\\ 1 & b & b^2 & b^4\\ 1 & c & c^2 & c^4\\ 1 & d & d^2 & d^4\end{vmatrix}$.

Exercice 4. Nature des intégrales (exemples traités dans le cours)

$$\int_0^{+\infty} e^{-t^2}\,\mathrm{d}t, \int_0^{\frac12}\frac{(\ln(t))^2}{t}\,\mathrm{d}t, \int_0^{\frac12}\frac{1}{t(\ln(t))^2}\,\mathrm{d}t, \int_0^1\frac{(\ln(t))^2}{t^{\frac34}}\,\mathrm{d}t, \int_0^{\frac12}\frac{1}{(\ln(t))^2 t^{\frac34}}\,\mathrm{d}t$$

Exercice 5.

1. Montrer que $\forall(P,Q)\in\mathbb{R}_n[X]^2, \displaystyle\int_0^1\frac{P(t)Q(t)}{\sqrt{1-t^2}}\,\mathrm{d}t$ converge.
2. Montrer que $\varphi:(P,Q)\mapsto\displaystyle\int_0^1\frac{P(t)Q(t)}{\sqrt{1-t^2}}\,\mathrm{d}t$ est un produit scalaire sur $\mathbb{R}_n[X]$

Exercice 6.

1. En utilisant le théorème de comparaison série-intégrale, donner la nature des séries de Riemann.
2. En calquant la démonstration du théorème de comparaison série-intégrale, donner un équivalent de $\displaystyle\sum_{n=1}^{N}\frac{1}{n^\alpha}$ quand $N\to+\infty$ et $\alpha<1$.