Colle de **mathématiques**

ATTENTION : *Une colle sera du type d'un oral de **CCINP**, à savoir deux exercices. Au cours de ces exercices, des questions de cours (du type énoncé d'une propriété ou d'une définition) devront vous être posées. Si , dans le programme de colle, il apparaît des démonstrations à connaître **signalées en gras**, elles pourront vous être demandées en début de colle.*

• ***Comment préparer une colle ?** : Une colle se prépare en ayant en mémoire parfaitement le cours ainsi que les exemples et applications directes inclus dans le cours et T.D.*

• ***Notation** : Dès lors qu'il s'avère que le cours n'est pas su, la note sera obligatoirement inférieure à 8. Ensuite, les points seront rajoutés suivant votre autonomie face aux exercices.*

• ***Après la colle** : Je vous demande de rédiger sur un cahier les exercices que vous avez eus en tenant compte des indications et remarques éventuelles de votre colleur.Je récupèrerai les cahiers de colle le mardi de la semaine suivante à votre colle*

***N'hésitez pas à venir me poser des questions**. L'intérêt pour vous est de retenir et d'avoir appris quelque chose de votre colle, d'enrichir vos TD d'exercices supplémentaires que vous pourrez revoir avant vos devoirs surveillés, pendant les devoirs maison, avant les concours*

1 Séries numériques

1. Les séries de réels à termes positifs : Savoir utiliser les critères : comparaison, équivalence , o, O, la règle de D'Alembert.
2. Séries de Bertrand : les techniques ont été vues mais tout doit être refait .
3. Relation entre séries et suites : Séries télescopiques. Étude d'une suite $(u_n)_n$ en étudiant la série de terme général $u_{n+1} - u_n$.
4. Absolue Convergence.
5. Technique de comparaison série et intégrale : *Intitulé du programme : Les étudiants doivent savoir utiliser la comparaison série-intégrale pour établir des convergences et divergences de séries du type $\sum f(n)$, estimer des sommes partielles de séries divergentes ou des restes de séries convergentes dans le cas de fonction f monotone. (Le cas le plus couramment rencontré est le suivant : Soit f une application de $[a, +\infty[(a \in \mathbb{R}^+)$, continue, positive et décroissante).*
6. Produit de Cauchy de deux séries.
7. Série Exponentielle complexe : **définition, $\mathbf{e^{z_1+z_2} = e^{z_1}e^{z_2}}$** Résolution dans $\mathbb{C}$ des équations du type $e^z = a, a \in \mathbb{C}$.
8. Séries alternées : **Démonstration du critère spécial des séries alternées**, signe et majoration de la somme et des restes, **méthode pour étudier une série alternée lorsque les hypothèses du CSSA ne sont pas vérifiées : faire un développement limité**.
9. Formule de Stirling :**re-proposer en exercice suivant la démonstration** :
   (a) Montrer que la suite $(n!e^n n^{-n-\frac{1}{2}})_n$ converge vers un réel $l > 0$.
   (b) On définit $\forall n \in \mathbb{N}, I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n(t)dt$.
      i. Montrer que $\forall n \geq 2, I_n = \dfrac{n-1}{n} I_{n-2}$.
      ii. En déduire $\forall n \in \mathbb{N}, I_{2n} = \dfrac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2}$ (technique de Wallis).
      iii. Montrer que la suite $(I_n)_n$ est décroissante.
      iv. En déduire $I_n \sim I_{n-1}$.
      v. Montrer que $nI_nI_{n-1} = \dfrac{\pi}{2}$.
      vi. En déduire que $I_n \sim \sqrt{\frac{\pi}{2n}}$.
      vii. En déduire que $l = \sqrt{2\pi}$.

Éléments propres d'un endomorphisme ou d'une matrice carrée

1. **Connaître parfaitement les définitions de polynômes caractéristiques, valeurs propres, spectre, vecteurs propres, sous espaces propres**.
2. Les méthodes pour déterminer les éléments propres :
   (a) En dimension finie :
      - On détermine le polynôme caractéristique et on en déduit le spectre.
      - Pour chaque valeur propre, on détermine le sous espace propre *qui ne doit pas être réduit au vecteur nul*.

   (b) En dimension quelconque ou lorsqu'on ne peut pas passer par le polynôme caractéristique :
      - Pour un endomorphisme de E : on résout $u(x) = \lambda x$ où $x \in E, x \neq 0, \lambda \in \mathbb{K}$ sont les inconnues.
      - Pour une matrice carrée : on résout $AX = \lambda X$ où $X \in \mathscr{M}_{n1}, X \neq 0, \lambda \in \mathbb{K}$ sont les inconnues.