PSI

MATHEMATIQUES **Programme de Colle semaine $n°6$ du 14 Octobre 2024**

Pour cette colle, le format devra être le suivant :

1. **Une question de cours : un énoncé ou une démonstration signalée en gras.On fera bien la distinction entre énoncer et démontrer.**
2. **Un exercice reprenant des questions des exercices 2 et 3 du DS Nř2 Niveau CCINP.**
3. **Un exercice au choix du colleur.**

1 Correction du DS $n°2$ Exercices 2 et 3

2 Intégration sur un intervalle quelconque

Savoirs attendus :

1. Méthodes de calcul :
   (a) Primitivation : on connaît une primitive F de f continue sur $[a, b[$ et alors $\int_a^b f(t)\,dt = [F(t)]_a^{t\to b} = \lim_{t\to b} F(t) - F(a)$.
   (b) Intégration par parties : Attention aux hypothèses.
   (c) Changement de variable : Bien adopter le plan suivant :
      i. On étudie la validité du changement de variable :
         A. si on fait $u = \varphi(t)$ dans $\int_I f$, on vérifie que φ est C^1 de I vers un intervalle J à déterminer.
         B. si on fait $t = \varphi(u)$ dans $\int_I f$, on vérifie que φ est C^1 d'un intervalle J à déterminer vers I
      ii. On procède au changement de variable en quatre étapes :
         A. on écrit la relation de changement de variable : $u = \varphi(t)$ ou $t = \varphi(u)$.
         B. on écrit la relation entre dt et du : $du = \varphi'(t)dt$ ou $dt = \varphi'(u)du$.
         C. on regarde les bornes en écrivant $t = \cdots \Longleftrightarrow u = \cdots$.
         D. on remplace dans l'intégrale : jamais on ne doit trouver une intégrale avec u et t à la fois.
2. Intégrabilité sur un intervalle quelconque :
   (a) Définition d'une application intégrable sur I, intégrale absolument convergente.
   (b) Savoir que f intégrable sur $I \Longrightarrow \int_I f$ converge.
   (c) **Savoir démontrer que** $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t}\,dt$ **converge mais n'est pas absolument convergente**.
   (d) Savoir utiliser les critères pour les fonctions positives pour démontrer une absolue convergence.

3 Séries Numériques

Savoirs attendus :

1. Connaître les notations d'une série, d'une Nième somme partielle d'une série, de la somme d'une série.
2. la définition d'une série convergente (resp : divergente) au moyen de la suite des sommes partielles et définition de la somme d'une série convergente.
3. **Cas des séries géométriques et de la série harmonique alternée**.
4. Séries exponentielles réelles .
5. Savoir étudier la nature d'une série à termes positifs en utilisant l'un des critères suivants :
   (a) Majoration de la suite des sommes partielles.
   (b) Théorème de comparaison.
   (c) Critère du o() et O()
   (d) Critère de l'équivalent.
6. **Nature des séries de Riemann**.
7. Savoir traiter les séries de Bertrand : quand utilise-t-on le théorème de comparaison, le critère de o(), la comparaison série intégrale ?
8. Relation entre séries et suites :
   (a) les séries télescopiques du type $\sum(f(n+1) - f(n))$.
   (b) Pour étudier une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, il suffit d'étudier la série de terme $u_{n+1} - u_n$. **Savoir démontrer que la suite** $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ **où** $u_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \ln n$ **converge et en déduire qu'il existe** γ **(constante d'Euler** $\sim 0,57$**) tel que** $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} = \ln n + \gamma + \underset{n\to+\infty}{o}$ (1).

9. Technique de Comparaison Séries/Intégrales : **Savoir trouver l'équivalent de** $R_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k^\alpha}$ **pour** $\alpha > 1$ **et** $S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^\alpha}$ **pour** $\alpha < 1$.
10. Absolue Convergence : connaître la définition, les propriétés : cv $\Leftarrow$ abs cv et la généralisation des critères O et O.