classes préparatoires scientifiques Lycée Brizeux

PSI
MATHEMATIQUES
Septembre 2024

Feuille d'Exercices $n°2$
Compléments d'algèbre linéaire

Exercice 1. Soit f la forme linéaire de $\mathbb{R}^3$ définie par $f(1,1,1)=0, f(2,0,1)=1, f(1,2,3)=4$. Justifier que $\operatorname{Ker}(f)$ est un hyperplan dont on donnera un supplémentaire, une base et une équation linéaire dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$.

Exercice 2. Soit $E=\mathbb{R}^3$. On considère les deux vecteurs $e_1=(1,-1,1), e_2=(0,1,3)$.
Montrer que $H=\operatorname{Vect}(e_1,e_2)$ est un hyperplan de E, en donner une équation et la forme linéaire de noyau H.

Exercice 3. Niveau Mines/Centrale.
Soient E un espace vectoriel de dimension finie et H un hyperplan, F sev de E. Quelle est la dimension de $H \cap F$?

Exercice 4. CCINP
Soit f une forme linéaire sur E, espace vectoriel de dimension n et $a \in E$ tel que $f(a) \neq 0$.

1. Montrer que $E=\operatorname{Ker}(f) \oplus \operatorname{Vect}(a)$.
2. On suppose $f(a)=1$. Montrer que p tel que $\forall x \in E, p(x)=f(x)a$ est un projecteur de E et donner les sous espaces F et G tel que p soit le projecteur sur F parallèlement à G .

Exercice 5.

1. Donner une base de $\mathbb{C}$, considéré comme $\mathbb{C}$-espace vectoriel.
2. Donner une base de $\mathbb{C}$, considéré comme $\mathbb{R}$-espace vectoriel.
3. Donner une base de $\mathbb{C}^2$, considéré comme $\mathbb{C}$-espace vectoriel.
4. Donner une base de $\mathbb{C}^2$, considéré comme $\mathbb{R}$-espace vectoriel.

Exercice 6. Quelle est la dimension de $\mathbb{R}_2[X] \times \mathbb{R}_1[X]$? Donner une base de cet espace.

Exercice 7. (Centrale 2017)
Deux polynômes P et Q de $\mathbb{C}_n[X]$ admettent une racine commune λ : montrer qu'il existe deux polynômes U et V de $\mathbb{C}_{n-1}[X]$ non nuls tels que $UP+VQ=0$.
On choisit $n=2$.
On pose $\Phi(U,V)=PU+VQ$:

1. Montrer que Φ est linéaire de $\mathbb{C}_1[X]^2$ vers $\mathbb{C}_3[X]$
2. Exprimer sa matrice dans des bases à déterminer.
3. Donner une condition sur les coefficients de P et Q pour qu'ils n'aient aucune racine commune.

Exercice 8. Niveau Mines/Centrale

1. Soit $r \in \mathbb{N}^*$ et $J_r=\begin{pmatrix} I_r & 0_{r,n-r} \\ 0_{n-r,r} & 0_{n-r} \end{pmatrix}$. Déterminer une base et la dimension de $E=\{M \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R}) / J_r M J_r = 0\}$.
2. Soient $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ de rang r et $F=\{B \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R}) / ABA=0\}$
   (a) Montrer que $F=\{B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}), ABA=0\}$ est un espace vectoriel.
   (b) Montrer $\exists (P,Q) \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R}), B \in F \Longleftrightarrow QBP \in E$.
   (c) Montrer que E et F sont isomorphes.
   (d) En déduire la dimension et une base de F.
   (e) Déterminer F pour $A=\begin{pmatrix} a & b & a \\ b & a & b \\ a & b & a \end{pmatrix}$.

Exercice 9. Soient $n \in \mathbb{N}^*, A, B, C \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}), I=I_n, M=\begin{pmatrix} I & A & C \\ 0 & I & B \\ 0 & 0 & I \end{pmatrix}$.

Montrer que M est inversible et calculer M^{-1}.

Exercice 10. On donne A et B dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ et

$$M = \begin{pmatrix} A & A \\ A & B \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{2n}(\mathbb{C})$$

1. Calculer le rang de M en fonction de A et B.
2. Calculer M^{-1} quand elle existe.

Exercice 11. Soit $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_4(\mathbb{R})$ et $B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_4(\mathbb{R})$

Calculer A^2 et B^2.
A et B sont-elles semblables ?

Exercice 12. Soit M une matrice non nulle de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ telle que $M^2 = 0$.
Calculer les dimensions de $\operatorname{Im} M$ et $\operatorname{Ker} M$. Montrer que M est semblable à $E_{1,3}$.

Exercice 13. Soit u un endomorphisme d'un $\mathbb{K}$-ev de dimension finie, tel que $u^3 + u = 0$

1. Pour $x \in \operatorname{Im} u$, calculer $u^2(x)$.
2. Soit v l'endomorphisme induit par u sur $\operatorname{Im} u$. Montrer que v est un isomorphisme.
3. Montrer que le rang de u est un entier pair

Exercice 14. Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$. On considère l'endomorphisme de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ défini par $f(M) = {}^tAM + MA$.

1. Montrer que les sous espaces des matrices symétriques et des matrices antisymétriques sont stables par f.
2. Déterminer la trace de f.

Exercice 15. Soit $H \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ une matrice de rang 1.

1. Montrer que H est le produit d'une matrice colonne et d'une matrice ligne et en déduire que $H^2 = Tr(H)H$.
2. Dans quels cas $A = I_n + H$ est-elle inversible ? Dans l'affirmative, donner A^{-1}.

Exercice 16. Niveau Mines/Centrale

1. Montrer que l'application qui à chaque matrice X de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ associe $tr(AX)$ est une forme linéaire sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.
2. Montrer que $\forall f \in (\mathcal{M}_n(\mathbb{K}))^*, \exists! M_f \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}), \forall X \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}), f(X) = tr(M_f\, X)$.
3. Soit f une forme linéaire sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ vérifiant : $\forall (A, B) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \times \mathcal{M}_n(\mathbb{K}),\ f(AB) = f(BA)$.
   (a) Prouver que si i et j sont deux éléments distincts de $[1..n]$, alors : $f(E_{ij}) = 0$ et $f(E_{ii}) = f(E_{jj})$.
   (Indication : utiliser la relation $E_{ij}E_{kl} = \delta_{jk}E_{il}$).
   (b) En déduire l'existence de $\lambda \in \mathbb{K}$, tel que $f = \lambda\, tr$.

Exercice 17. Trouver l'expression d'une fonction f telle que la courbe représentative de f passe par les points $A(1, 3), B(3, 0), C(2, -1)$ et $D(4, 4)$.

Exercice 18. Vrai ou faux : il existe une base de $\mathbb{K}_3[X]$ dont tous les polynômes ont le même degré.

Exercice 19. Soit P un polynôme et $(x_1, \cdots, x_n)$ n réels. Montrer que le polynôme d'interpolation de Lagrange de P aux nœuds $(x_i)_i$ est le reste de la division euclidienne de P par $\prod\limits_{k=1}^{n} (X - x_k)$.

Exercice 20. Notons $(a_i)_{1 \leq i \leq p}$ une famille de p réels distincts et L_i le i^{ime} polynôme de Lagrange associé à ces points.

1. Simplifier le polynôme $P_k = \sum\limits_{i=1}^{p} a_i^k L_i$ lorsque k est un entier compris entre 0 et $p + 2$.
2. Calculer $P_k(0)$ pour k, entier compris entre 0 et $p + 2$.
3. Montrer que $W = \{f \in C^0(\mathbb{R}) / \forall i \in [1..p], f(a_i) = 0\}$ est un s.e.v de $C^0(\mathbb{R})$, dont un supplémentaire est $\mathbb{R}_{p-1}[X]$.

Exercice 21. (CCINP)

Calculer, pour $(a, b, c, d) \in \mathbb{K}^4$, $\begin{vmatrix} 1 & a & a^2 & a^4 \\ 1 & b & b^2 & b^4 \\ 1 & c & c^2 & c^4 \\ 1 & d & d^2 & d^4 \end{vmatrix}$.

Exercice 22. Niveau Mines/Centrale. Soient P un polynôme de degré n et $(a_0, \cdots, a_n)$ des scalaires deux à deux distincts. Montrer que $(P(X + a_i))_{0 \leq i \leq n}$ est une base de $\mathbb{K}_n[X]$.