classes préparatoires scientifiques Lycée Brizeux

PSI
MATHEMATIQUES

Devoir Libre $n°10$
PSI
MATHEMATIQUES
Pour le 14 Mars 2025

Vous choisissez un niveau et vous faites les deux exercices associés.

1 Niveau CCINP/E3A

Exercice 1. Un sauteur tente de franchir des hauteurs successives numérotées $1, 2, \ldots, n, \cdots$.
Il ne peut tenter de passer la hauteur $n+1$ que s'il a réussi les sauts de hauteurs $1, 2, \ldots, n$.
En supposant que le sauteur a réussi tous les sauts précédents, la probabilité de succès au n-ième saut est $p_n = \frac{1}{n}$.
Ainsi le premier saut est toujours réussi.
Pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, on note S_k l'événement : ≪le sauteur a réussi son k-ième saut≫ et on note X la variable aléatoire égale au numéro du dernier saut réussi.

1. Rappeler sans démonstration la formule des probabilités composées.
2. Rappeler sans démonstration le développement en série entière au voisinage de 0 de la fonction exponentielle.
3. Déterminer l'ensemble des valeurs prises par la variable aléatoire X.
4. Déterminer $\mathbb{P}([X=1])$.
5. Justifier que $[X=2] = S_1 \cap S_2 \cap \overline{S_3}$. En déduire $\mathbb{P}([X=2])$
6. Pour tout entier $n \geqslant 2$, exprimer l'évènement $[X=n]$ en fonction d'évènements du type S_k.
7. Déterminer la loi de X.
8. Vérifier par **le calcul** que : $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \mathbb{P}([X=n]) = 1$.
9. Montrer que X possède une espérance et la calculer.

Exercice 2. Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $E = \mathbb{R}_n[X]$. On note $(P_0(X)=1, P_1(X)=X, \ldots, P_n(X)=X^n)$ la base canonique de E. Soit $(a_j)_{j \in \llbracket 0,n \rrbracket}$ une famille de réels distincts deux à deux.
Pour tout couple (P, Q) d'éléments de E, on pose : $(P \mid Q) = \sum_{j=0}^{n} P(a_j) Q(a_j)$.

1. Vérifier que l'on définit ainsi un produit scalaire sur E.
2. Soit P un polynôme de E, calculer $(P \mid P_0)$.
3. Pour tout $j \in \llbracket 0,n \rrbracket$, on considère le polynôme $L_j(X) = \prod_{\substack{k=0 \\ k \neq j}}^{n} \frac{X-a_k}{a_j-a_k}$.
   3.1. Démontrer que, pour tout couple $(i,j) \in \llbracket 0,n \rrbracket^2, L_j(a_i) = \begin{cases} 1 \text{ si } i=j \\ 0 \text{ sinon} \end{cases}$.
   3.2. Prouver que la famille $\mathscr{B} = (L_j)_{j \in \llbracket 0,n \rrbracket}$ est une famille orthogonale pour le produit scalaire (1).
   3.3. En déduire que $\mathscr{B}$ est une base de E et qu'elle est orthonormale.
   3.4. Déterminer les composantes d'un polynôme P de E dans la base $\mathscr{B}$.
   3.5. Déterminer $\sum_{j=0}^{n} L_j$.
4. Soit H l'ensemble des polynômes P de E tels que $\sum_{j=0}^{n} P(a_j) = 0$.
   4.1. Montrer que H est un sous-espace vectoriel de E.
   4.2. Déterminer $H^{\perp}$ et en déduire la dimension de H.
5. Soit Q un polynôme de E.
   5.1. Déterminer le projeté orthogonal de Q sur $H^{\perp}$.
   5.2. Déterminer la distance de Q au sous-espace vectoriel H.

Niveau Mines / Centrale

Exercice 3. Pour $n \in \mathbb{N}$, on note $\mathbb{R}_n[X]$ l'espace vectoriel des polynômes à coefficients dans $\mathbb{R}$ de degré inférieur ou égal à n.
Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $(a_1, \ldots, a_n)$ une famille de n réels deux à deux distincts.

Pour tout i dans $[\![1, n]\!]$, on note L_i le polynôme de degré $n-1$ défini par

$$L_i(X) = \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n} \frac{X - a_j}{a_i - a_j}. \tag{1}$$

On dit que $L_1, \ldots, L_n$ sont les polynômes de Lagrange associés à $a_1, \ldots, a_n$.

On définit l'application

$$\langle \cdot, \cdot \rangle : \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_{n-1}[X] \times \mathbb{R}_{n-1}[X] & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (P, Q) & \longmapsto & \displaystyle\sum_{k=1}^{n} P(a_k) Q(a_k) \end{array} \right.$$

1. Montrer que $\langle \cdot, \cdot \rangle$ est un produit scalaire sur $\mathbb{R}_{n-1}[X]$.
2. Montrer que, pour tout i et k dans $[\![1, n]\!]$,

$$L_i(a_k) = \begin{cases} 1 & \text{si } k = i \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

3. Montrer que, pour tout $i \in [\![1, n]\!]$ et tout $P \in \mathbb{R}_{n-1}[X]$,

$$\langle L_i, P \rangle = P(a_i).$$

4. Montrer que la famille $(L_1, \ldots, L_n)$ est une base orthonormée de $\mathbb{R}_{n-1}[X]$ muni du produit scalaire $\langle \cdot, \cdot \rangle$.
5. En déduire que, pour tout $P \in \mathbb{R}_{n-1}[X]$,

$$P = \sum_{i=1}^{n} P(a_i) L_i.$$

6. Montrer que, pour tout polynôme P de degré inférieur ou égal à $n-2$,

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{P(a_i)}{\displaystyle\prod_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n} (a_i - a_j)} = 0.$$

Exercice 4. Soit $n \in \mathbb{N}^*$, $\mathscr{S}$ et $\mathscr{A}$ les espaces vectoriels respectifs des matrices symétriques puis antisymétriques.
Soit $M = (m_{i,j})_{i,j} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

Calculer

$$d_1 = \inf \left\{ \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} (m_{i,j} - a_{i,j})^2, A = (a_{i,j})_{i,j} \in \mathcal{S} \right\} \text{ et } d_2 = \inf \left\{ \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} (m_{i,j} - a_{i,j})^2, A = (a_{i,j})_{i,j} \in \mathcal{A} \right\}.$$

Appliquer à

$$M = \begin{pmatrix} 1 & \cdots & 1 \\ 2 & \cdots & 2 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ n & \cdots & n \end{pmatrix}$$

On pourra se placer dans $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ muni du produit scalaire $(A, B) \mapsto tr(A^T B)$ et utiliser que $\mathcal{S}$ et $\mathcal{A}$ sont supplémentaires orthogonaux pour ce produit scalaire.