classes préparatoires scientifiques Lycée Brizeux

PSI
MATHEMATIQUES

Devoir Libre Obligatoire n°2
à rendre le mardi 24 Septembre 2024
Niveau E3A/CCINP

Exercice I

Soit $n \in \mathbb{N}$.
On note $\mathbb{R}_n[X]$ l'espace vectoriel des polynômes à coefficients réels de degré inférieur ou égal à n,
et $B = \left\{1, X, X^2 ..., X^n\right\}$ sa base canonique.
Etant donnée une famille de $(n+1)$ réels distincts $a_0 < a_1 < a_2 < ... < a_n$, on lui associe
les polynômes $L_0, L_1, L_2 ... L_n$ de $\mathbb{R}_n[X]$ tels que :
$\forall i \in \{0, 1, 2, ..n\}, \forall j \in \{0, 1, 2, ..n\} \setminus \{i\}, \quad L_i(a_j) = 0$ et $L_i(a_i) = 1$
On note enfin A la matrice carrée dont les vecteurs colonnes sont les coordonnées dans la base B des vecteurs $L_0, L_1, L_2, ... L_n$.

1. On prend $n = 2,\ a_0 = 0,\ a_1 = 1,\ a_2 = 2$.
   (a) Donner L_0, L_1, L_2
   Montrer que $\{L_0, L_1, L_2\}$ est une base de $\mathcal{R}_2[X]$.
   Montrer que, pour polynôme P de $\mathbb{R}_2[X]$, on a $P = P(0)L_0 + P(1)L_1 + P(2)L_2$.
   (b) Former la matrice de changement de base de $B = \left\{1, X, X^2\right\}$ à $B' = \{L_0, L_1, L_2\}$. Justifier que A est cette matrice.
   (c) Le but de cette question est de déterminer les polynômes P de $\mathbb{R}_2[X]$ tels que :
   $$P(X) = P(0) + P(1)X + P(2)X^2$$
   Soit P un tel polynôme.
   i. Donner la matrice colonne T donnant les coordonnées de P dans B.
   ii. Donner la matrice colonne T' donnant les coordonnées de P dans B'.
   iii. Chercher dans votre cours de PCSI la relation matricielle qui existe entre T, T' et A.
   iv. En déduire l'ensemble des solutions S des polynômes P de $\mathbb{R}_2[X]$ vérifiant $P(X) = P(0) + P(1)X + P(2)X^2$.
   v. Montrer que S est un sev de $\mathbb{R}_2[X]$ de dimension finie. En déterminer une base.
2. Retour au cas général
   (a) Montrer que $B' = \{L_0, L_1, L_2 .. L_n\}$ est une base de $\mathbb{R}_n[X]$.
   Indiquer les coordonnées dans la base B' d'un polynôme P quelconque de $\mathbb{R}_n[X]$.
   (b) — Quel est le nombre de lignes et de colonnes de A ?
   — Montrer que A est inversible.
   — Calculer son inverse. Comment s'appelle cette matrice ? Donner son déterminant.
   (c) Montrer que $\sum\limits_{i=0}^{n} L_i = 1$.
   En déduire que la somme des éléments de la première ligne de A est égale à 1, et que la somme des éléments de toute autre ligne de A est nulle.

Exercice II

Soit $n \in \mathbb{N}^*$.Soit $(E_{ij})_{1 \leq i,j \leq n}$ la base des matrices élémentaires de $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$.
$[\![1, n]\!]$ désigne l'intervalle des entiers naturels compris entre 1 et n.

1. Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$. Calculer AE_{ij} et $E_{i,j}A$ pour $(i, j) \in [\![1, n]\!]^2$.
2. En déduire $E_{ij}E_{kl}$ pour $(i, j, k, l) \in [\![1, n]\!]^4$.

3. Soit $f : \mathscr{M}_n(\mathbb{K}) \longmapsto \mathbb{K}$ linéaire vérifiant : $\forall (A,B) \in (\mathscr{M}_n(\mathbb{K}))^2, f(AB) = f(BA)$.
   (a) Montrer que l'application trace vérifie cette condition. *Savoir refaire la démonstration rigoureuse du cours sans regarder le cours !!*

   Soit $f : \mathscr{M}_n(\mathbb{K}) \longmapsto \mathbb{K}$ linéaire vérifiant la condition de l'énoncé.

   (b) Montrer que : $\forall i \in [1,n], f(E_{ii}) = f(E_{11})$.
   (c) Montrer que : $\forall (i,j) \in [1,n]^2, i \neq j \Longrightarrow f(E_{ij}) = 0$.
   (d) En déduire que f est colinéaire à la trace. (c-a-d qu'il existe $\lambda \in \mathbb{K}, \forall A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K}), f(A) = \lambda tr(A)$).

Devoir Libre Obligatoire n°2
MATHEMATIQUES Algèbre
PSI
Corrigé

Exercice I

1. On prend $n = 2,\ a_0 = 0,\ a_1 = 1,\ a_2 = 2$.

 (a) — D'après la construction des polynômes L_0, L_1, L_2, nous pouvons dire que 1 et 2 sont racines de L_0. Ainsi L_0 est divisible par $(X-1)(X-2)$. Etant de degré inférieur ou égal à 2, on peut écrire : il existe $\lambda \in \mathbb{R}, L_0(X) = \lambda(X-1)(X-2)$. $L_0(0) = 1 \Longrightarrow 1 = 2\lambda$. D'où, $L_0(X) = \frac{1}{2}(X-1)(X-2)$.
 De manière analogue, on a 0 et 2 sont racines de L_1. Ainsi L_1 est divisible par $X(X-2)$. Etant de degré inférieur ou égal à 2, on peut écrire : il existe $\lambda \in \mathbb{R}, L_1(X) = \lambda X(X-2)$. $L_1(1) = 1 \Longrightarrow 1 = -\lambda$. D'où, $L_1(X) = -X(X-2)$.
 Puis, 0 et 1 sont racines de L_2. Ainsi L_2 est divisible par $X(X-1)$. Etant de degré inférieur ou égal à 2, on peut écrire : il existe $\lambda \in \mathbb{R}, L_2(X) = \lambda X(X-1)$. $L_2(2) = 1 \Longrightarrow 1 = 2\lambda$. D'où, $L_2(X) = \frac{1}{2}X(X-1)$.

 — $\dim \mathbb{R}_2[X]$=3 donc (L_0, L_1, L_2) est une famille maximale. Elle est libre car :
 Soit $(a,b,c) \in \mathbb{R}^3$, $aL_0 + bL_1 + cL_2 = 0$.
 Ceci revient à écrire : $\forall x \in \mathbb{R}, aL_0(x) + bL_1(x) + cL_2(x) = 0$.
 En particulier pour $x = 0$, ce qui impose que $a = 0$.En particulier pour $x = 1$, ce qui impose que $b = 0$. En particulier pour $x = 2$, ce qui impose que $c = 0$. (L_0, L_1, L_2) est ainsi une famille libre et maximale de $\mathbb{R}_2[X]$. Donc une base de $\mathbb{R}_2[X]$.

 — Soit $P \in \mathbb{R}_2[X]$. P se décompose dans la base précédente. Ainsi il existe $(a,b,c) \in \mathbb{R}^3$, $aL_0+bL_1+cL_2 = P$, c'est-à-dire : $\forall x \in \mathbb{R}, P(x) = aL_0(x) + bL_1(x) + cL_2(x)$. En particulier pour $x = 0$, ce qui impose que $a = P(0)$.En particulier pour $x = P(1)$, ce qui impose que $b = P(1)$. En particulier pour $x = 2$, ce qui impose que $c = P(2)$. cqfd.

 (b) Pour construire la matrice de passage de $B = (1, X, X^2)$ à $B' = (L_0, L_1, L_2)$, on écrit en colonne les coordonnées des vecteurs de (L_0, L_1, L_2) dans la base B. C'est exactement la définition de A.
 $L_0(X) = \frac{1}{2}X^2 - \frac{3}{2}X + 1, L_1(X) = -X^2 + 2X, L_2(X) = \frac{1}{2}X^2 - \frac{1}{2}X$.
 Ainsi,

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -\frac{3}{2} & 2 & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -1 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

 (c) i. D'après la définition de P, on a $T = \begin{pmatrix} P(0) \\ P(1) \\ P(2) \end{pmatrix}$.

 ii. Par 1.(a), $T' = \begin{pmatrix} P(0) \\ P(1) \\ P(2) \end{pmatrix}$.

 iii. Par le cours, $T = AT'$.

 iv. Posons $T = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$. Trouver P de $\mathbb{R}_2[X]$ vérifiant $P(X) = P(0) + P(1)X + P(2)X^2$ revient à trouver (x,y,z) tels que $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$.
 On est ramené à résoudre le système :

$$\left\{ \begin{array}{c} x = x \\ y = -\frac{3}{2}x + 2y - \frac{1}{2}z \\ z = \frac{1}{2}x - y + \frac{1}{2}z \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{c} 3x - 2y + z = 0 \\ x - 2y - z = 0 \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{c} x - 2y - z = 0 \\ -2x - 2z = 0 \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{c} z = -x \\ y = x \end{array} \right.$$

 Ainsi les solutions cherchées sont $P = x(1 + X - X^2)$. C'est à dire que $S = vect(1 + X + X^2)$.

v. $S = vect(1 + X + X^2)$ donc S est un sev de $\mathbb{R}_2[X]$ de dimension 1 et $(1 + X + X^2)$ en est une base.

2. (a) — $\dim \mathbb{R}_n[X] = n+1$ et $\{L_0, L_1, L_2..L_n\}$ a $n+1$ éléments donc la famille est maximale. Montrons qu'elle est libre :
Soit $(\lambda_0, \cdots, \lambda_n) \in \mathbb{R}^{n+1}, \lambda_0 L_0 + \cdots + \lambda_n L_n = 0$.
Ce qui revient à écrire : $\forall x \in \mathbb{R}, \lambda_0 L_0(x) + \cdots + \lambda_i L_i(x) + \cdots + \lambda_n L_n(x) = 0$.
Soit $i \in \{0, \cdots, n\}$. Appliquons la relation précédente à $x = a_i$. Par la définition des $(L_j)_j$, nous arrivons à : $\lambda_i = 0$.
Conclusion : $\{L_0, L_1, L_2..L_n\}$ est une famille maximale et libre de $\mathbb{R}_n[X]$, donc une base.

— Soit $P \in \mathbb{R}_n[X]$. P se décompose sur la base B' de la manière suivante : $P = \lambda_0 L_0 + \cdots + \lambda_n L_n$ où $(\lambda_0, \cdots, \lambda_n) \in \mathbb{R}^{n+1}$. Ce qui revient à écrire : $\forall x \in \mathbb{R}, P(x) = \lambda_0 L_0(x) + \cdots + \lambda_i L_i(x) + \cdots + \lambda_n L_n(x)$.
Soit $i \in \{0, \cdots, n\}$. Appliquons la relation précédente à $x = a_i$. Par la définition des $(L_j)_j$, nous arrivons à : $P(a_i) = \lambda_i$.
Conclusion : Les coordonnées de P dans la base B' sont $(P(a_0), \cdots, P(a_n))$.

(b) — A est une matrice à $n+1$ lignes et colonnes car $\dim \mathbb{R}_n[X] = n+1$.

— A est une matrice de passage donc ses colonnes traduisent des vecteurs d'une base donc des vecteurs indépendants, c'est-à-dire que A a toutes ses colonnes indépendantes. Donc A est inversible.

— A^{-1} est la matrice de passage de B' vers B.
Il nous faut écrire en colonnes les coordonnées de $X^j, j \in \{0, \cdots, n\}$ dans B'. Par 2 (a), on peut écrire $X^j = a_0^j L_0 + \cdots + a_i^j L_i + \cdots + a_n^j L_n$. Donc,

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & a_0 & a_0^2 & \cdots & a_0^n \\ 1 & a_1 & a_1^2 & \cdots & a_1^n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & a_{n-1} & a_{n-1}^2 & \cdots & a_{n-1}^n \\ 1 & a_n & a_n^2 & \cdots & a_n^n \end{pmatrix}$$

On retrouve la matrice de Vandermonde associée à la famille $(a_0, a_1, \cdots, a_n)$. Par le cours, son déterminant est alors :

$$\prod_{0 \le i < j \le n} (a_j - a_i)$$

(c) — Le polynôme P=1 se décompose sur la base $(L_i)_{0 \le i \le n}$ et ses coordonnées dans cette base sont :$(P(a_i)_{0 \le i \le n})$.
Or pour tout i, $P(a_i) = 1$ ce qui donne la combinaison linéaire $1 = \sum_{i=0}^{n} L_i$.

— Traduisons $1 = \sum_{i=0}^{n} L_i$ dans la base canonique de $\mathbb{R}_n[X]$.
Notons $A = (a_{i,j})_{1 \le i,j \le n+1}$.
Les coordonnées de 1 dans la base canonique de $\mathbb{R}_n[X]$ sont : $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$.
Les coordonnées de L_i dans la base canonique correspondent à la $(i+1)^{\text{ième}}$ colonne de A par définition de A.Ainsi, nous obtenons

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} = \sum_{i=1}^{n+1} \begin{pmatrix} a_{1i} \\ a_{2i} \\ \vdots \\ a_{n+1i} \end{pmatrix}$$

Ce qui nous donne $1 = \sum_{i=1}^{n+1} a_{1i}$. C'est-à-dire que la somme des éléments de la première ligne de A est égale à 1.
Et $\forall k \in \{2..n+1\}, 0 = \sum_{i=1}^{n+1} a_{ki}$.C'est-à-dire que la somme des éléments des autres lignes de A est nulle.
Remarque : on peut le vérifier au 1.(b)

Exercice II

Soit $n \in \mathbb{N}^*$.Soit $(E_{ij})_{1\leq i,j\leq n}$ la base des matrices élémentaires de $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$.
$[\![1,n]\!]$ désigne l'intervalle des entiers naturels compris entre 1 et n.

1. Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$.
   - Toutes les colonnes de E_{ij} autres que la $j^{\text{ième}}$ sont nulles donc il en est de même pour celles de AE_{ij}. La $j^{\text{ième}}$ colonne de E_{ij} n'est autre que les coordonnées du $i^{\text{ième}}$ vecteur de la base canonique de $\mathbb{R}^n$. Alors A appliqué à ce vecteur nous donne la $i^{\text{ième}}$ colonne de A.
     Conclusion : AE_{ij} est la matrice dont toutes les colonnes sont nulles sauf la $j^{\text{ième}}$ qui est la $i^{\text{ième}}$ colonne de A.
   - Toutes les lignes de E_{ij} autres que la $i^{\text{ième}}$ sont nulles donc il en est de même pour celles de $E_{ij}A$. Si 1 est la $j^{\text{ième}}$ coordonnées de $(0,\cdots,1,0,\cdots,0)$, alors $(0,\cdots,1,0,\cdots,0)A$ nous donne la $j^{\text{ième}}$ ligne de A.
     Conclusion : $E_{ij}A$ est la matrice dont toutes les lignes sont nulles sauf la $i^{\text{ième}}$ qui est la $j^{\text{ième}}$ ligne de A.
2. En appliquant ce qui précède, on obtient $E_{ij}E_{kl}$ est la matrice dont toutes les lignes sont nulles sauf la $i^{\text{ième}}$ qui est la $j^{\text{ième}}$ ligne de E_{kl}.
   Par conséquent, si $j \neq k$, $E_{ij}E_{kl} = 0$ et si $j = k$, $E_{ij}E_{jl}$ est la matrice dont toutes les lignes sont nulles sauf la $i^{\text{ième}}$ qui est la $j^{\text{ième}}$ ligne de E_{jl}, c'est-à-dire que des coeffs nuls sauf sur la $l^{\text{ième}}$ colonne qui vaut 1. On reconnaît E_{il}. Ainsi $E_{ij}E_{jl} = E_{il}$.
3. (a) Cf cours.
   (b) Soit $i \in [1,n]$, on peut écrire par 2. $E_{ii} = E_{i1}E_{1i}$. Alors $f(E_{ii}) = f(E_{i1}E_{1i}) = f(E_{1i}E_{i1})$ par la condition vérifiée par f. Puis, $E_{1i}E_{i1} = E_{11}$ par 2. Conclusion : $\forall i \in [1,n], f(E_{ii}) = f(E_{11})$.
   (c) Soit $i \neq j$. on peut écrire par 2. $E_{ij} = E_{i1}E_{1j}$.Alors $f(E_{ij}) = f(E_{i1}E_{1j}) = f(E_{1j}E_{i1})$ par la condition vérifiée par f. Puis, $E_{1j}E_{i1} = 0$ par 2 et car $i \neq j$. Alors $f(E_{ij}) = f(0) = 0$ car f est linéaire.
   (d) Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$. Décomposée dans la base des matrices élémentaires, on peut écrire :
   $$A = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}E_{ij}$$
   où a_{ij} désignent les coefficients de A.
   Alors
   $$f(A) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}f(E_{ij})$$
   par linéarité de f.
   $$f(A) = \sum_{i=1}^{n} a_{ii}f(E_{ii})$$
   car $f(E_{ij}) = 0$ pour $i \neq j$.
   $$f(A) = f(E_{11})\sum_{i=1}^{n} a_{ii}$$
   car $\forall i \in [1,n], f(E_{ii}) = f(E_{11})$ et $f(E_{11})$ est indépendant de l'indice i.
   f est à valeurs dans $\mathbb{K}$ donc $f(E_{11}) \in \mathbb{K}$. Ce scalaire ne dépend pas de A. Posons $\lambda = f(E_{11})$. D'autre part, $\sum_{i=1}^{n} a_{ii}$ n'est autre que $\operatorname{tr}(A)$. D'où, il existe $\lambda \in \mathbb{K}, \forall A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K}), f(A) = \lambda tr(A)$.