classes préparatoires scientifiques Lycée Brizeux

PSI
MATHEMATIQUES

Devoir Libre Obligatoire n°2
à rendre le mardi 24 Septembre 2024
Niveau Mines/Centrale

Exercice I

$\mathbb{K}$ désigne soit $\mathbb{R}$ soit $\mathbb{C}$. Les deux questions sont indépendantes. Dans chaque question, vous devrez à un moment donné, utiliser les polynômes d'interpolation de Lagrange associés à une famille $(a_0, a_1, \cdots, a_n) \in \mathbb{K}^{n+1}$ convenablement choisie (n sera également à choisir) et utiliser les propriétés vues en cours .

1. Soit P de degré n tel que, pour tout $k \in \{1..n+1\}$, $P(k) = \dfrac{1}{k}$. Calculer $P(n+2)$. *Indication : faire intervenir les polynômes de Lagrange associés à* $\{1..n+1\}$ *et exprimer* $L_k(n+2)$ *en fonction de* $\begin{pmatrix} n+2 \\ k \end{pmatrix}$.
2. Soit n un entier naturel et $(a_0, a_1, \cdots, a_n) \in \mathbb{R}^{n+1}$ **deux à deux distincts**.
   Soit E l'espace vectoriel des applications continues sur $\mathbb{R}$ à valeurs dans $\mathbb{R}$.
   Déterminer un supplémentaire dans E du sous espace vectoriel F suivant :
   $$F = \{f \in E / \forall i \in \{0..n\}, f(a_i) = 0\}$$
   .

Exercice II

1. Montrer que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\cos((n-1)x) + \cos((n+1)x) = 2\cos(nx)\cos(x)$.
2. Pour $n \in \mathbb{N}$, montrer par récurrence qu'il existe un polynôme $T_n \in \mathbb{R}[X]$ tel que :
   $$\forall x \in \mathbb{R}, T_n(\cos(x)) = \cos(nx)$$
   Lors de la récurrence, on donnera T_0, T_1, T_2, T_3, on établira que
   $$\forall x \in \mathbb{R}, \forall n \in \mathbb{N}^*, T_{n-1} + T_{n+1} = 2XT_n$$
   et on précisera le degré et le coefficient dominant de T_n. *On appelle* $(T_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *famille des polynômes de Tchebychev. Ils ont un rôle dans la modélisation en mathématiques appliquées.*
3. Pour $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$, en utilisant T_2, calculer le déterminant
   $$D = \begin{vmatrix} 1 & \cos(a) & \cos(2a) \\ 1 & \cos(b) & \cos(2b) \\ 1 & \cos(c) & \cos(2c) \end{vmatrix}$$
4. Pour $(a, b, c, d) \in \mathbb{R}^4$, en utilisant T_2 et T_3, calculer le déterminant
   $$D = \begin{vmatrix} 1 & \cos(a) & \cos(2a) & \cos(3a) \\ 1 & \cos(b) & \cos(2b) & \cos(3b) \\ 1 & \cos(c) & \cos(2c) & \cos(3c) \\ 1 & \cos(d) & \cos(2d) & \cos(3d) \end{vmatrix}$$
5. Pour $(a_0, \cdots, a_n) \in \mathbb{R}^{n+1}$, calculer le déterminant
   $$D = \begin{vmatrix} 1 & \cos(a_0) & \cos(2a_0) & \cdots & \cos(na_0) \\ 1 & \cos(a_1) & \cos(2a_1) & \cdots & \cos(na_1) \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & \cos(a_n) & \cos(2a_n) & \cdots & \cos(na_n) \end{vmatrix}$$

Indication : faire des opérations sur les colonnes pour se ramener à un déterminant de Vandermonde

Exercice III

On donne, pour $n \in \mathbb{N}^*$, la matrice circulante droite $D_n = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & \cdots & a_n \\ a_n & a_1 & \cdots & a_{n-2} & a_{n-1} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_3 & a_4 & \cdots & \cdots & a_2 \\ a_2 & a_3 & \cdots & \cdots & a_1 \end{pmatrix}$

la matrice circulante gauche $G_n = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & \cdots & a_n \\ a_2 & a_3 & \cdots & a_n & a_1 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{n-1} & a_n & \cdots & \cdots & a_{n-2} \\ a_n & a_1 & \cdots & \cdots & a_{n-1} \end{pmatrix}$ et $J = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ \vdots & \vdots & & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}$

Soit $P = \sum_{k=1}^{n} a_k X^{k-1}$ et $\forall k \in \{1..n\},\ \theta_k = e^{\frac{2(k-1)\pi i}{n}}$.

Pour $\theta \in \mathbb{R}$, on définit

$$V_\theta = \begin{pmatrix} 1 \\ \theta \\ \theta^2 \\ \vdots \\ \theta^{n-1} \end{pmatrix}$$

1. Calculer $\forall k \in \{1..n\},\ \theta_k^n$ et en déduire que, $\forall k \in \{1..n\},\ \forall j \in \{1..n\},\ \dfrac{1}{\theta_k^j} = \theta_k^{n-j}$.
2. Vérifier que : , $\forall k \in \{1..n\},\ D_n V_{\theta_k} = (P(\theta_k), \theta_k P(\theta_k), \theta_k^2 P(\theta_k), \cdots, \theta_k^{n-1} P(\theta_k))^T$.
3. Soit la matrice de Vandermonde $V_n(\theta_1, \theta_2, \cdots, \theta_n)$. Calculer $D_n V_n(\theta_1, \theta_2, \cdots, \theta_n)$ et en déduire $\det(D_n)$.
4. Calculer JD_n et en déduire $\det(J)$ puis $\det(G_n)$.
5. Application :
   (a) i. Calculer, pour tout $x \neq 1, P(x) = \sum\limits_{k=0}^{n} x^k$.
   ii. En déduire pour tout $x \neq 1, Q(x) = \sum\limits_{k=1}^{n} kx^{k-1}$.
   (b) Calculer $P(1)$ et $Q(1)$
   (c) En considérant que, pour tout $j \in \{1, ..n\}$, $\theta_j - 1$ sont les racines du polynôme $(X+1)^n - 1$ et en utilisant les relations entre coefficients et racines d'un polynôme, montrer que $\prod\limits_{j=1}^{n-1} (\theta_j - 1) = (-1)^{n-1}\, n$.
   (d) Déduire de ce qui précède

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & \cdots & n \\ n & 1 & \cdots & n-2 & n-1 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 3 & 4 & \cdots & \cdots & 2 \\ 2 & 3 & \cdots & \cdots & 1 \end{vmatrix}$$