classes préparatoires scientifiques Lycée Brizeux

PSI
MATHEMATIQUES

Devoir Libre Obligatoire n°5
E3A
à rendre le 10 Décembre 2024

Problème 1

Soit $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ et u l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ canoniquement associé à la matrice A.

1. Justifier que A est diagonalisable sur $\mathbb{R}$ et la diagonaliser : On donnera la base $(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3)$ de $\mathbb{R}^3$ dans laquelle la matrice de u est diagonale et on précisera cette matrice diagonale.
2. Soit $B \in \mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ telle que $B^2 = A$. On note v l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ canoniquement associé à la matrice B.
   (a) Justifier que $v^2 = u$ et que u et v commutent.
   (b) Justifier que pour tout $i \in \{1, 2, 3\}$, il existe $\alpha_i \in \mathbb{R}$, $v(\varepsilon_i) = \alpha_i \varepsilon_i)$.
   (c) Conclure que la matrice V de v dans $(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3)$ est diagonale de la forme $V = diag(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$ et en déduire les valeurs possibles de $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$.
   (d) Quel lien y-a-t-il entre B et V ?
   (e) En déduire toutes les matrices B telles que $B^2 = A$. Combien y-en-a-t-il ?
3. Déterminer le polynôme annulateur de A unitaire de plus petit degré.
4. Quel est l'ensemble de tous les polynômes annulateurs de A
5. En utilisant la première question, donner $\det(A)$.
6. Justifier que A est inversible, donner A^{-1} sous la forme d'un polynôme matriciel de A.
7. Calculer les puissances de A en fonction d'un polynôme matriciel de A de degré 2.
8. Justifier que pour tout polynôme $P \in \mathbb{R}[X]$,il existe $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$, $P(A) = aI_3 + bA + cA^2$.
9. En déduire que $\mathbb{R}[A] = \{P(A)/P \in \mathbb{R}[X]\}$ est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension finie dont on donnera une base et la dimension.

Problème 2

On considère $\mathbb{R}^3$ muni de sa base canonique (e_1, e_2, e_3) et f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans la base canonique est :

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 3 \\ 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Partie I : Calcul des puissances de A

1. Montrer que $\mathrm{Sp}\,(f) = \{\lambda_1, \lambda_2\}$ avec $\lambda_1 < \lambda_2$.
2. f est-il un automorphisme ?
3. f est-il diagonalisable ?
4. Déterminer deux vecteurs de $\mathbb{R}^3$ u_1 et u_2 tels que, pour tout $i \in \{1, 2\}$
   — la première composante de u_i est 1.
   — $E_{\lambda_i} = \mathrm{Vect}\,(u_i)$
5. Soit $u_3 = (1, 1, 1)$. Justifier que $\mathscr{C} = (u_1, u_2, u_3)$ est une base de $\mathbb{R}^3$.
6. Justifier que la matrice de f dans $\mathscr{C}$ est :

$$T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

7. Rappeler la relation matricielle entre A et T.
8. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, il existe un réel α_n tel que :

$$T^n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & {}^n2 & \alpha_n \\ 0 & 0 & 2^n \end{pmatrix}$$

   On donnera α_1 ainsi que relation entre α_{n+1} et α_n.
9. Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}^*, \alpha_n = n2^{n-1}$ et en déduire A^n en fonction de n.

Partie II : Les matrices commutant avec A On considère le sous ensemble $C(A)$ des matrices $M \in \mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ telles que $AM = MA$.

1. Soit P la matrice de passage de (e_1, e_2, e_3) vers $\mathscr{C}$.
   On pose $M' = P^{-1}MP$. Montrer que

$$AM = MA \Longleftrightarrow TM' = M'T$$

2. Montrer qu'une matrice M' vérifie $TM' = M'T$ si et seulement si M' est de la forme $\begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & c \\ 0 & 0 & b \end{pmatrix}$ où $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$.
3. En déduire que $M \in C(A)$ si et seulement si il existe des réels a, b, c tels que :

$$M = \begin{pmatrix} -a+2b & 2a-2b & -a+b+2c \\ -a+b & 2a-b & -a+b+c \\ 0 & 0 & b \end{pmatrix}$$

4. Montrer alors que $C(A)$ est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension finie dont on donnera une base et la dimension.
5. Vérifier que $C(A) = \text{Vect}(I_2, A, A^2)$.
6. Vérifier que $C(A) = \mathbb{R}[A] = \{P(A)/P \in \mathbb{R}[X]\}$.