classes préparatoires scientifiques Lycée Brizeux

**PSI**
**MATHEMATIQUES**

**Devoir Libre Obligatoire n°5**
**Type Mines**
**à rendre le 10 Décembre 2024**

# Exercice

On considère une matrice $S$ de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ admettant $n$ valeurs propres réelles $\lambda_1, \lambda_2 \cdots, \lambda_n$ distinctes deux à deux. L'objectif de l'exercice est de montrer que , si $k$ est un entier naturel impair et si $A$ est une matrice de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ qui commute avec $S^k$ alors elle commute avec $S$. Dans la dernière question, on montre un contre-exemple pour $k$ pair.

1. Justifier que $f : x \mapsto x^k$ est injective sur $\mathbb{R}$ pour $k$ impair mais non injective pour $k$ pair.
   Considérons désormais $k$ entier naturel impair.
2. Justifier qu'il existe un unique polynôme $U \in \mathbb{R}_{n-1}[X]$ tel que : $\forall i \in \{1, \cdots, n\}, U(\lambda_i^k) = \lambda_i$.
3. Montrer que $S$ est diagonalisable sur $\mathbb{R}$ ainsi que $U(S)$.
4. Montrer que le polynôme $R$, défini par $R(X) = U(X^k) - X$ est un polynôme annulateur de $S$.
5. Soit $A$ une matrice de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ qui commute avec $S^k$.
   (a) Montrer que : $\forall p \in \mathbb{N}, AS^{pk} = S^{pk}A$.
   (b) Déduire des questions précédentes que $A$ et $S$ commutent.
6. On considère les deux matrices $A$ et $S$ de $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$ suivantes :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} \quad S = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

   (a) Montrer que $S$ admet deux valeurs propres distinctes.
   (b) Établir que $A$ commute avec toutes les puissances paires de $S$ mais pas avec $S$

# Problème

L'objectif de ce problème est de démontrer le théorème de Cayley-Hamilton.

## Partie I :Le théorème de Cayley Hamilton pour un endomorphisme particulier

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $P$ un polynôme de degré $n$ défini par :

$$P(X) = X^n - \sum_{i=0}^{n-1} a_i X^i$$

où $(a_0, a_1, \cdots, a_{n-1})$ sont des scalaires de $\mathbb{C}$.
On appelle matrice compagnon de $P$, la matrice $C \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ définie par :

$$C = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & \cdots & 0 & a_0 \\ 1 & 0 & \ddots & \ddots & 0 & a_1 \\ 0 & 1 & 0 & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 & a_{n-2} \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & 1 & a_{n-1} \end{pmatrix}$$

On note $\mathscr{B}_0 = (e_1, \cdots, e_n)$ la base canonique de $\mathbb{C}^n$ et $f$ l'endomorphisme de $\mathbb{C}^n$ canoniquement associé à $C$.

1. Établir que $P = \chi_C$.
2. Vérifier que $\forall j \in [\![1, n]\!], f^j(e_1) = e_{j+1}$ et $f^n(e_1) = \sum_{i=1}^{n} a_{i-1}e_i$.
3. Soit $g = P(f)$
   (a) Vérifier que $g(e_1) = 0$ puis $\forall i \in \mathbb{N}, g \circ f = f \circ g$
   (b) En déduire que $P$ est un polynôme annulateur de $f$ puis de $C$.
4. (a) Montrer que, pour tout nombre complexe $z$, la matrice $C - zI_n$ est de rang supérieur ou égal à $n - 1$. En déduire que chaque sous espace propre de $C$ est de dimension 1.
   (b) En déduire que $C$ est diagonalisable sur $\mathbb{C}$ si et seulement si $P$ admet $n$ racines deux à deux distinctes.
5. (a) Montrer que $A_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ est diagonalisable sur $\mathbb{C}$
   (b) Montrer que $A_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 4 \\ 1 & 0 & 0 & -8 \\ 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ n'est pas diagonalisable sur $\mathbb{C}$
6. (a) Justifier que $C$ et $C^T$ ont même valeurs propres.
   (b) Soit $\lambda$ une valeur propre de $C^T$. Déterminer une base de $E_\lambda(C^T)$.
   (c) On suppose que $P$ admet $n$ racines $\lambda_1, \lambda_2 \cdots, \lambda_n$ distinctes deux à deux.
   Retrouver en utilisant les questions précédentes que la matrice de Vandermonde associée à $\lambda_1, \lambda_2 \cdots, \lambda_n$ est inversible.

## Partie II : Le théorème de Cayley Hamilton pour un endomorphisme quelconque

Soit $E$ un $\mathbb{C}$ espace vectoriel de dimension finie $n$ et $f \in \mathscr{L}(E)$ .
Soit $x \in E$ avec $x \neq 0$.

1. Justifier l'existence d'un entier $p_x \in [0, n-1]$ tel que : $(x, f(x), f^2(x), \cdots, f^{p_x}(x))$ soit libre et $(x, f(x), f^2(x), \cdots, f^{p_x+1}(x))$.
2. Un tel $p_x$ étant défini, justifier l'existence de scalaires $(a_0, a_1, \cdots, a_{p_x})$ (qui dépendent de $x$) tels que :

$$f^{p_x+1}(x) = a_0x + a_1f(x) + \cdots + a_{p_x}f^{p_x}(x)$$

3. On pose $P_x$ le polynôme : $P_x(X) = X^{p_x+1} - \sum_{j=0}^{p_x} a_jX^j$.
   (a) Justifier que $P_x(f)(x) = 0$.
   (b) On pose $F = Vect(x, f(x), f^2(x), \cdots, f^{p_x}(x))$. Montrer que $F$ est stable par $f$.

   On note alors $\tilde{f}$ l'endomorphisme induit par $f$ sur $F$.
   (c) Donner la matrice $A$ de $\tilde{f}$ dans la base $(x, f(x), f^2(x), \cdots, f^{p_x}(x))$ de $F$ et et déterminer son polynôme caractéristique.
   (d) On complète $(x, f(x), f^2(x), \cdots, f^{p_x}(x))$ en une base $B$ de $E$. Montrer que la matrice de $f$ dans $B$ est une matrice triangulaire supérieure par blocs.
   (e) Montrer que $\chi_f$ est divisible par $\chi_{\tilde{f}}$.
   (f) En déduire que $\chi_f(f)(x) = 0$.
   (g) En déduire que $\chi_f$ est un polynôme annulateur de $f$.