Devoir Libre Supplémentaire
PSI
MATHEMATIQUES
Sujet Niveau 2

Exercice I

1. Soient $(u_n)_n$ et $(v_n)_n$ deux suites. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on note $U_n = \sum_{k=1}^{n} u_k$ et $V_n = \sum_{k=1}^{n} v_k$.

   Montrer que, pour tout $n \geq 2$, $\sum_{k=1}^{n} U_k v_k = U_n V_n - \sum_{k=1}^{n-1} u_{k+1} V_k$.

2. En déduire que $\sum_{n \geq 1} \frac{\sin n}{n}$ converge. (*pour u_n, choisir une suite dont la somme partielle est télescopique et égale à* $\frac{1}{n}$)

3. Déterminer la nature de la série de terme général $\sin n \sin \frac{1}{n}$

Exercice II

On considère la matrice, dite matrice tridiagonale, suivante :

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ 1 & 2 & \ddots & \ddots & & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \ddots & 1 \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$$

1. Pourquoi est-on sûr que le spectre réel de A est non vide ?
2. Montrer que λ est valeur propre réelle de A si et seulement si il existe une suite $(x_k)_{k \in \mathbb{N}}$ telle que :
   — $x_0 = x_{n+1} = 0$
   — $\exists k \in \{1..n\}, x_k \neq 0$
   — $\forall k \geq 1, x_{k-1} + (2-\lambda)x_k + x_{k+1} = 0$

   Procéder par double implication.
3. On considère l'équation sur $\mathbb{C}$: $r^2 + (2-\lambda)r + 1 = 0$
   (a) Justifier qu'elle admet deux racines complexes . On les note u et v .
   (b) Justifier les relations : $r^2 + (2-\lambda)r + 1 = (r-u)(r-v)$ et $u + v = \lambda - 2, uv = 1$.
4. Soit $\lambda \in Sp_{\mathbb{R}}(A)$ et $(x_k)_k$ la suite associée définie en 1.
   On suppose que les racines u et v trouvées auparavant sont distinctes.
   (a) Justifier qu'il existe $(\alpha, \beta) \in \mathbb{C}^2/\{(0,0)\}, \forall k \in \mathbb{N}, x_k = \alpha u^k + \beta v^k$.
   (b) Etablir que $\beta = -\alpha$, $u^{2(n+1)} = 1$ et $v = \overline{u}$.
   (c) Justifier que $u \notin \{1, -1\}$.
   (d) Montrer qu'on peut choisir $u = e^{\frac{p\,i\pi}{n+1}}$ pour $p \in \{1..n\}$ et $v = e^{-\frac{p\,i\pi}{n+1}}$ pour $p \in \{1..n\}$.

(e) En déduire que les valeurs propres associées aux couples (u, v) trouvées précédemment sont

$$\forall p \in [\![1, n]\!],\ \lambda_p = 4\cos^2\left(\frac{\pi p}{2(n+1)}\right)$$

(f) Pour quelle raison n'a-t-on pas besoin de traiter le cas $u = v$ pour étudier les éléments propres de A ?

(g) En déduire que $Sp_{\mathbb{R}}(A) = Sp_{\mathbb{C}}(A) = \{4\cos^2\left(\frac{\pi p}{2(n+1)}\right) / p \in [\![1, n]\!]\}$ et

$$\forall p \in [\![1, n]\!], E_{\lambda_p}(A) = \mathrm{Vect}\,(X_p) \text{ avec } \lambda_p = 4\cos^2\left(\frac{\pi p}{2(n+1)}\right) \text{ et } X_p = \begin{pmatrix} \sin\frac{p\pi}{(n+1)} \\ \sin\frac{2p\pi}{(n+1)} \\ \vdots \\ \sin\frac{np\pi}{(n+1)} \end{pmatrix}.$$

5. Donner le polynôme caractéristique de A.
6. Calculer $4\sum_{p=1}^{n}\cos^2\left(\frac{p\pi}{2n+2}\right)$.
7. Déduire de ce qui précède que A est inversible.