classes préparatoires scientifiques Lycée Brizeux

PSI
MATHEMATIQUES

Devoir Libre $n°6$
PSI
MATHEMATIQUES
Sujet E3A/CCINP
Pour le 6 Janvier 2025

Exercice I

Ce problème récapitule tout ce qu'il faut savoir faire sur les fonctions dzèta et mu On considère les deux fonctions suivantes :

$$\zeta : x \longmapsto \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^x}$$

$$\mu : x \longmapsto \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^x}$$

Utilisons le thm.

1. Donner leur domaine de définition.
2. Montrer qu'elles sont continues sur leur domaine de définition.
3. Montrer qu'elles sont C^∞ sur leur domaine de définition.
4. Montrer que les séries de fonctions définissant ζ et μ ne convergent pas uniformément sur leur domaine de définition.
5. Montrer que : $\forall x > 1, \mu(x) = (1 - 2^{1-x})\zeta(x)$.(*regrouper les termes pairs et impairs dans les sommes partielles*).
6. Calculer $\mu(1)$.
7. (a) Montrer que :

$$\forall x > 0, -1 + 2\mu(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n+1} \left[\frac{1}{n^x} - \frac{1}{(n+1)^x}\right]$$

Conclusion
Par le thm, ..
On en déduit

   (b) En déduire :

$$\forall x > 0, \frac{1}{2} \leq \mu(x) \leq 1 - \frac{1}{2^{x+1}}$$

   (c) En déduire $\lim_{x \to 0^+} \mu(x)$.
8. Montrer que ζ est décroissante sur son domaine de définition.
9. Donner $\lim_{x \to +\infty} \mu(x)$ et $\lim_{x \to +\infty} \zeta(x)$.
10. (a) Justifier que :

$$\forall x > 1, \forall n \geq 2, \int_n^{n+1} \frac{dt}{t^x} \leq \frac{1}{n^x} \leq \int_{n-1}^{n} \frac{dt}{t^x}$$

   (b) En déduire : $\forall x > 1, \dfrac{1}{x-1} \leq \zeta(x) \leq 1 + \dfrac{1}{x-1}$.
   (c) En déduire un équivalent de $\zeta(x)$ quand x tend vers 1^+.
   (d) Retrouver ce résultat en utilisant la relation du ~~4~~ 5
11. Donner l'allure de la représentation graphique de ζ.

Exercice II

1. Justifier que la série $\sum_{n\geqslant 1} \frac{(-1)^{n+1}}{n}$ converge.

2.

2.1. Démontrer que l'on a : $\sum_{n=0}^{+\infty}\left(\int_0^1 x^{2n}(1-x)\,\mathrm{d}x\right) = \int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{1+x}$.
On pourra utiliser un théorème d'intégration terme à terme.

2.2. En déduire la valeur de : $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n}$.

3. Déterminer l'ensemble de définition de la fonction $\varphi : x \mapsto \sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^{n+1}\frac{x^n}{n}$.

Calculer $\varphi(1)$.

4.

4.1. Calculer l'intégrale : $\int_0^1 \frac{1-x}{1+x^2}\,\mathrm{d}x$.

4.2. En calculant de deux façons différentes $\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n\left(\int_0^1 x^{2n}(1-x)\,\mathrm{d}x\right)$, déterminer la valeur

de la somme : $S = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)(2n+2)}$, après en avoir justifié l'existence.

Exercice III

1. On note γ la racine positive du trinôme $x^2 - x - 1$. Justifier que $\gamma > 1$ et que la deuxième racine est $-\frac{1}{\gamma}$.

2. Soient (a_n) et (b_n) définies par $b_0 = 0$, $b_1 = 1$ et les relations de récurrence : $\forall n \in \mathbb{N}$, $\begin{cases} a_{n+1} = b_n \\ b_{n+1} = a_n + b_n \end{cases}$.

2.1. Montrer que pour tout entier n strictement positif : $b_{n+1} = b_n + b_{n-1}$.

$b_n = \lambda \gamma^n + \mu \left(-\frac{1}{\gamma}\right)^n$

2.2. Parmi les réponses proposées, une seule est l'expression correcte de b_n valable pour tout entier naturel n. Laquelle ?

$0 = \lambda + \mu$

$b_n = \lambda\left\{\gamma^n + \frac{(-1)^{n+1}}{\gamma^n}\right)$

(1) $\frac{\gamma^n}{\sqrt{5}} + \frac{(-1)^{n+1}}{\gamma^{n+1}\sqrt{5}}$; (2) $\frac{(-1)^{n+1}\gamma^n}{\sqrt{5}} + \frac{1}{\gamma^n\sqrt{5}}$; (3) $\frac{\gamma^n}{\sqrt{5}} + \frac{(-1)^{n+1}}{\gamma^n\sqrt{5}}$.

$b_1 = \lambda\left(\gamma + \frac{1}{\gamma}\right)$

2.3. Exprimer, pour tout $n \in \mathbb{N}$, a_n en fonction de n.

$= \lambda \frac{\gamma^2+1}{\gamma}$

2.4. Démontrer que pour $n \in \mathbb{N}$, $\gamma^n = a_n + b_n\gamma$.

$= \lambda \frac{(1+\sqrt{3})^2+4}{2(1+\sqrt{5})}$

$\frac{1+\cancel{0}+2\sqrt{5}}{2(1+\sqrt{5})} = \frac{5+\sqrt{5}}{1+\sqrt{5}} = \sqrt{5}$

3. On pose, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $V_n = \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \end{pmatrix}$.
Déterminer une unique matrice $M \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ telle que : $V_{n+1} = M\, V_n$.
4. Justifier que la matrice M est diagonalisable et déterminer ses éléments propres.
5. Montrer que l'on a : $\forall n \in \mathbb{N},\ \ M^n = a_n\, I_2 + b_n\, M$.
6. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose : $C_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{M^k}{k\,!}$.
Montrer que la suite $(C_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge et déterminer sa limite C à l'aide de γ et des matrices I_2 et M.
7. Démontrer que la matrice C est semblable à la matrice $\Delta = \begin{pmatrix} e^{\gamma} & 0 \\ 0 & e^{-1/\gamma} \end{pmatrix}$.

Exercice IV

Question de cours
Soit f une fonction continue sur $\mathbb{R}$ et intégrable sur $]-\infty, -1]$.

1. Soient $a \in \mathbb{R}$ et F_1 la fonction qui à tout x de $\mathbb{R}$ associe $\displaystyle\int_a^x f(t)\,dt$.
Justifier que F_1 est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$ et déterminer l'expression de $F_1'(x)$ pour tout x de $\mathbb{R}$.
2. Justifier que la fonction F qui à tout x de $\mathbb{R}$ associe $\displaystyle\int_{-\infty}^x f(t)\,dt$ est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$ et déterminer l'expression de $F'(x)$ pour tout x de $\mathbb{R}$.

* * * * * *

Pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 2, on note E_n l'espace vectoriel des fonctions polynomiales de degré inférieur ou égal à n.
Pour tout $k \in [\![0, n]\!]$, on note e_k la fonction réelle de la variable réelle $t \mapsto t^k$ et $\mathcal{B} = (e_k)_{k\in[\![0,n]\!]}$ la base canonique de E_n.
On note D l'endomorphisme dérivation de E_n et Id l'endomorphisme identité de E_n.

3. Soit $k \in \mathbb{N}$. Montrer que la fonction $f_k : t \mapsto t^k\, e^t$ est intégrable sur $]-\infty, -1]$.
4. Soit $f \in E_n$. Montrer que l'on définit sur E_n une application linéaire L en posant $g = L(f)$ avec :
$$\forall x \in \mathbb{R},\ g(x) = e^{-x} \int_{-\infty}^{x} f(t)\, e^t\, dt.$$
5. Soit $g \in E_n$ tel que $g = L(f)$.
Montrer que g est solution sur $\mathbb{R}$ de l'équation différentielle : $y' + y = f(x)$.
6. En déduire Ker(L).
7.
   7.1. Calculer $L(e_0)$.
   7.2. Montrer que pour tout entier naturel $k \in [\![0, n-1]\!]$, $L(e_{k+1}) = e_{k+1} - (k+1)\, L(e_k)$.
   7.3. En déduire que L est un endomorphisme de E_n.
8. Prouver que L est un automorphisme de E_n.

9. **Recherche des sous-espaces propres de L**

Soient λ une valeur propre de L et f un vecteur propre associé.

9.1. Justifier que $\lambda \neq 0$.

9.2. Montrer que f est solution sur $\mathbb{R}$ de l'équation différentielle : $\lambda y' + (\lambda - 1)y = 0$ $(*)$.

9.3. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation différentielle $(*)$.

9.4. Déterminer les solutions polynomiales de l'équation différentielle $(*)$.

9.5. En déduire les valeurs propres de l'endomorphisme L et déterminer les vecteurs propres associés.

L'endomorphisme L est-il diagonalisable ?

10. Comparer L^{-1} et $D+$ Id.

11. Déterminer la matrice M de L^{-1} dans la base $\mathscr{B}$.

12. Déterminer les valeurs propres de L^{-1}. Retrouver alors les valeurs propres de L.