Devoir Libre $n°7$
PSI
MATHEMATIQUES
Sujet E3A/CCINP
Pour le 21 Janvier 2025

Partie 1

On considère l'espace vectoriel $\mathbb{R}^4$ muni de la base canonique $B = (e_1, e_2, e_3, e_4)$ avec

$$e_1 = (1,0,0,0)\ ;\ e_2 = (0,1,0,0)\ ;\ e_3 = (0,0,1,0) \text{ et } e_4 = (0,0,0,1).$$

Soient f et g les deux endomorphismes de $\mathbb{R}^4$ dont les matrices dans la base B sont respectivement : $J = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ et $K = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

1.1. Montrer que fog=gof.

1.2. Montrer que si v est un vecteur propre de f associé à la valeur propre λ, alors soit g(v) est nul, soit g(v) est vecteur propre de f associé à la valeur propre λ.

1.3. Montrer que le vecteur $v_1 = (1,1,1,1)$ est un vecteur propre commun à f et g. Préciser pour chaque endomorphisme la valeur propre associée.

1.4. Déterminer $\mathrm{Ker}(f) \cap \mathrm{Ker}(g)$.

On considère les vecteurs :

$$v_1 = (1,1,1,1),\ v_2 = (1,-1,1,-1),\ v_3 = (1,0,-1,0),\ v_4 = (0,1,0,-1).$$

1.5. Montrer que (v_1, v_2, v_3, v_4) est une base de $\mathbb{R}^4$ formée de vecteurs propres communs à f et g. On notera cette base B'. Écrire la matrice de passage, notée P, de la base B à la base B'.

1.6. Exprimer les vecteurs de la base B en fonction des vecteurs de la base B'. En déduire l'inverse de P.

1.7. Donner les matrices de f et g dans la base B', notées respectivement J' et K', ainsi que les relations entre J et J', entre K et K'.

Partie 2

On considère le sous-ensemble E de l'ensemble des matrices réelles carrées de taille 4 défini par :

$$E = \left\{ M(a,b) = \begin{pmatrix} a+b & a & a-b & a \\ a & a+b & a & a-b \\ a-b & a & a+b & a \\ a & a-b & a & a+b \end{pmatrix}, (a,b) \in \mathbb{R}^2 \right\}.$$

2.1. Exprimer M(a,b) en fonction de J et K.

2.2. Montrer que le produit de deux matrices de E est encore une matrice de E.

2.3. Montrer que pour tout $(a,b) \in \mathbb{R}^2$, M(a,b) admet une base de vecteurs propres indépendants de a et b.

2.4. En déduire une matrice D(a,b) diagonale semblable à M(a,b). Écrire une relation entre M(a,b) et D(a,b).

2.5. Montrer que pour tout entier naturel n, non nul, on a : $[M(a,b)]^n = M(4^{n-1}a^n, 2^{n-1}b^n)$.

Partie 3

On considère le damier suivant :

B_2	N_1	B_3
N_4	B_1	N_2
B_4	N_3	B_5

Un pion se déplace avec équiprobabilité sur ce damier de la case où il se trouve vers une des cases qui possède avec cette case un côté commun.
Ainsi, si le pion est en N_2, il peut se déplacer vers B_1, B_3 ou B_5, avec des probabilités égales.
On suppose qu'au départ, le pion est sur une case blanche.

3.1. Où peut se trouver le pion après un nombre pair de déplacements ? Après un nombre impair de déplacements ?

Posons maintenant pour $n \in \mathbb{N}$, $V_n = \begin{pmatrix} p_{1,n} \\ p_{2,n} \\ p_{3,n} \\ p_{4,n} \\ p_{5,n} \end{pmatrix}$ où pour $k \in [\![1,5]\!]$, $p_{k,n}$ est la probabilité pour que le pion soit sur la case B_k après le (2n)-ième déplacement si $n \neq 0$ et $p_{k,0}$ est la probabilité pour que le pion soit sur la case B_k au départ. Nous noterons $B_{k,n}$ l'évènement : « le pion est sur la case B_k après le (2n)-ième déplacement ».

3.2. Exprimer, pour tout entier n non nul, $(p_{k,n})_{1\le k\le 5}$ en fonction de $(q_{k,n})_{1\le k\le 4}$, puis $(q_{k,n})_{1\le k\le 4}$ en fonction de $(p_{k,n-1})_{1\le k\le 5}$. En déduire deux matrices A et B telles que : $A\in M_{4,5}(\mathbb{R})$, $B\in M_{5,4}(\mathbb{R})$ et $\forall n\in\mathbb{N}^*$, $W_n = AV_{n-1}$ et $V_n = BW_n$.

3.3. Calculer AB et montrer que AB est un élément de E.

3.4. Montrer que : $\forall n\in\mathbb{N}^*$, $(AB)^n = M\left(\frac{1}{4},\frac{1}{2\times 3^n}\right)$.

3.5. Exprimer de façon simple, pour tout entier naturel n, non nul, $(BA)^n$ en fonction de A, de B et d'une puissance de AB. Calculer $(BA)^n$.

3.6. Déterminer, pour tout entier naturel n, non nul, une relation entre V_n et V_0.

3.7. Soit $n\in\mathbb{N}^*$. Quelle est la probabilité pour que le pion soit sur la case B_1 après le (2n)-ième déplacement ? Que remarque-t-on ?

Nous admettrons que le résultat du n-ième déplacement ne dépend que de la position du pion juste avant ce déplacement et non pas des autres positions précédentes. On a donc, en particulier : $\forall n\in\mathbb{N}^*$, $\forall k\in[\![1,4]\!]$, $P(B_{1,n+1} \mid N_{k,n+1}\cap B_{1,n}) = P(B_{1,n+1} \mid N_{k,n+1})$.

3.8. Montrer que, pour tout entier n, non nul, les événements $B_{1,n}$ et $B_{1,n+1}$ sont indépendants.