classes préparatoires scientifiques Lycée Brizeux

PSI
MATHEMATIQUES

Devoir Libre $n°8$

PSI
MATHEMATIQUES
Sujet E3A/CCINP
Pour le 4 Février 2025

1. **Question de cours**
   Soit f une fonction continue sur $\mathbb{R}$, à valeurs réelles et T-périodique.
   Montrer que : $\forall x \in \mathbb{R}, \displaystyle\int_x^{x+T} f(u)\mathrm{d}u = \int_0^T f(u)\mathrm{d}u.$

* * * * *

On se propose de déterminer des fonctions y de classe C^2 sur $\mathbb{R}$ et vérifiant, pour tout réel x, la relation :

$$xy''(x) + y'(x) - 4xy(x) = 0. \qquad (**)$$

2. On suppose qu'il existe une fonction g, développable en série entière, de rayon de convergence non nul, vérifiant $(**)$, sous la forme $g : x \mapsto \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ et telle que : $g(0) = a_0 = 1$.
   (a) Prouver que $a_1 = 0$ et déterminer pour tout $n \geqslant 1$ une relation entre a_{n-1} et a_{n+1}.
   (b) Déterminer alors a_n pour tout entier naturel n.
   (c) Déterminer l'ensemble de définition de la fonction g ainsi obtenue.

   Soit F la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$F : x \mapsto F(x) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \exp(2x\cos(t))\mathrm{d}t.$$

3. **Quelques propriétés de la fonction** F
   (a) Étudier la parité de la fonction F.
   On pourra utiliser le changement de variable $u = \pi - t$ et la question de cours.
   (b) Pour tout couple (x, t) de $\mathbb{R} \times [0, 2\pi]$, on pose $h(x, t) = \exp(2x\cos(t))$. On admet que F est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$ et

$$\forall k \in \mathbb{N}^*, \forall x \in \mathbb{R}, F^{(k)}(x) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{\partial^k h}{\partial x^k}(x, t)\mathrm{d}t$$

   Montrer que F vérifie la relation $(**)$.
4. **Développement en série entière de** F
   (a) Donner le développement en série entière au voisinage de zéro de la fonction exponentielle et son domaine de validité.
   (b) En utilisant la question précédente, montrer qu'il existe une suite $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de réels tels que :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad F(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} I_n x^n$$

   où I_n s'exprime simplement à l'aide de l'intégrale $J_n = \displaystyle\int_0^{2\pi} (\cos(t))^n \,\mathrm{d}t$.
   On citera les théorèmes utilisés en s'assurant que toutes leurs hypothèses sont bien vérifiées.
   (c) Calculer J_0 et J_1.
   (d) Soit $n \geqslant 2$. Déterminer une relation de récurrence entre J_n et J_{n-2}.
   (e) En déduire, pour tout entier naturel n, une expression de J_n en fonction de n.
   (f) Comparer alors les fonctions F et g.