

Devoir Libre n°8
PSI
MATHEMATIQUES
Sujet Mines
Pour le 7 Février 2025

L'objectif de ce problème est l'étude asymptotique du nombre de partitions d'un entier naturel n , c'est-à-dire du nombre de décompositions de n en somme d'entiers naturels non nuls (sans tenir compte de l'ordre des termes). Une définition rigoureuse de ce nombre, noté p_n , est donnée en début de partie **B**. Dans la partie **A**, on introduit une fonction P de variable complexe; dans la fin de la partie **B** on démontre qu'il s'agit de la somme, sur le disque unité ouvert de \mathbf{C} , de la série entière $\sum_{n \geq 0} p_n z^n$. L'étude de P au voisinage de 1 permet alors, dans les parties suivantes, de progresser vers l'obtention d'un équivalent simple de la suite $(p_n)_{n \in \mathbf{N}}$ (formule asymptotique de Hardy et Ramanujan). Tout au long du problème, le disque unité ouvert de \mathbf{C} sera noté :

$$D = \{z \in \mathbf{C} \mid |z| < 1\}.$$

Dans tout l'énoncé, on utilisera la dénomination « variable aléatoire réelle » pour signifier « variable aléatoire discrète réelle ».
On admettra aussi les deux identités classiques suivantes :

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}, \text{ et } : \int_{\mathbf{R}} e^{-\frac{u^2}{2}} du = \sqrt{2\pi}.$$

A. Fonctions L et P

1. Soit $z \in D$. Montrer la convergence de la série $\sum_{n \geq 1} \frac{z^n}{n}$. Préciser la valeur de sa somme lorsque $z \in]-1, 1[$. On notera :

$$L(z) := \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{z^n}{n}.$$

2. Soit $z \in D$. Montrer que la fonction $\Phi : t \mapsto L(tz)$ est dérivable sur $[-1, 1]$ et donner une expression simple de sa dérivée.
3. Soit $z \in D$. Montrer que la fonction $\Psi : t \mapsto (1 - tz)e^{L(tz)}$ est constante sur $[0, 1]$, et en déduire que :

$$\exp(L(z)) = \frac{1}{1 - z}.$$

4. Montrer que $|L(z)| \leq -\ln(1 - |z|)$ pour tout z dans D .
En déduire la convergence de la série $\sum_{n \geq 1} L(z^n)$ pour tout z dans D .

Dans la suite, on notera, pour z dans D :

$$P(z) := \exp \left[\sum_{n=1}^{+\infty} L(z^n) \right].$$

5. Soit $z \in D$. Vérifier que $P(z) \neq 0$, que :

$$P(z) = \lim_{N \rightarrow +\infty} \prod_{n=1}^N \frac{1}{1 - z^n}$$

et que pour tout réel $t > 0$:

$$\ln(P(e^{-t})) = - \sum_{n=1}^{+\infty} \ln(1 - e^{-nt}).$$

B. Développement asymptotique en variable réelle

Dans cette partie, on introduit la fonction q qui à tout réel x associe le nombre réel $q(x) = x - [x] - \frac{1}{2}$, où $[x]$ désigne la partie entière de x .

6. Montrer que q est continue par morceaux sur \mathbf{R} , qu'elle est 1-périodique et que la fonction $|q|$ est paire.

7. Montrer que $\int_1^{+\infty} \frac{q(u)}{e^{tu} - 1} du$ est bien définie pour tout réel $t > 0$.

8. Montrer que pour tout entier $n > 1$:

$$\int_1^n \frac{q(u)}{u} du = \ln(n!) + (n-1) - n \ln(n) - \frac{1}{2} \ln(n) = \ln\left(\frac{n!e^n}{n^n \sqrt{n}}\right) - 1.$$

9. Montrer que $\int_{[x]}^x \frac{q(u)}{u} du$ tend vers 0 quand x tend vers $+\infty$, et en déduire la convergence de l'intégrale $\int_1^{+\infty} \frac{q(u)}{u} du$, ainsi que l'égalité :

$$\int_1^{+\infty} \frac{q(u)}{u} du = \frac{\ln(2\pi)}{2} - 1$$

10. À l'aide d'un développement en série sous l'intégrale, montrer que :

$$\int_0^{+\infty} \ln(1 - e^{-u}) du = -\frac{\pi^2}{6}.$$

11. Montrer que :

$$\int_0^1 \ln\left(\frac{1 - e^{-tu}}{t}\right) du \xrightarrow{t \rightarrow 0^+} -1.$$

On pourra commencer par établir que $x \mapsto \frac{1-e^{-x}}{x}$ est décroissante sur \mathbf{R}_+^ .*

Pour $k \in \mathbf{N}^*$ et $t \in \mathbf{R}_+$, on pose :

$$u_k(t) = \int_{k/2}^{(k+1)/2} \frac{tq(u)}{e^{tu} - 1} du \quad \text{si } t > 0, \quad \text{et : } u_k(t) = \int_{k/2}^{(k+1)/2} \frac{q(u)}{u} du \quad \text{si } t = 0.$$

12. Montrer que u_k est continue sur \mathbf{R}_+ pour tout $k \in \mathbf{N}^*$.

13. Soit $t \in \mathbf{R}_+^*$. Montrer successivement que $|u_k(t)| = \int_{k/2}^{(k+1)/2} \frac{t|q(u)|}{e^{tu} - 1} du$ puis $u_k(t) = (-1)^k |u_k(t)|$ pour tout entier $k \geq 1$, et établir enfin que :

$$\forall n \in \mathbf{N}^*, \left| \sum_{k=n}^{+\infty} u_k(t) \right| \leq \frac{1}{2n}.$$

On admettra dans la suite que cette majoration vaut encore pour $t = 0$.

14. En déduire que :

$$\int_1^{+\infty} \frac{tq(u)}{e^{tu} - 1} du \xrightarrow{t \rightarrow 0^+} \frac{\ln(2\pi)}{2} - 1.$$

15. Montrer, pour tout réel $t > 0$, l'identité :

$$\int_1^{+\infty} \frac{tq(u)}{e^{tu} - 1} du = -\frac{1}{2} \ln(1 - e^{-t}) - \ln(P(e^{-t})) - \int_1^{+\infty} \ln(1 - e^{-tu}) du.$$

16. Conclure que :

$$\ln(P(e^{-t})) = \frac{\pi^2}{6t} + \frac{\ln(t)}{2} - \frac{\ln(2\pi)}{2} + o_{t \rightarrow 0^+}(1).$$

C. Développement de P en série entière

Pour $(n, N) \in \mathbf{N} \times \mathbf{N}^*$, on note $P_{n,N}$ l'ensemble des listes $(a_1, \dots, a_N) \in \mathbf{N}^N$ telles que : $\sum_{k=1}^N ka_k = n$. Si cet ensemble est fini, on note $p_{n,N}$ son cardinal.

17. Soit $n \in \mathbf{N}$. Montrer que $P_{n,N}$ est inclus dans $\llbracket 0, n \rrbracket^N$ et est non vide pour tout $N \in \mathbf{N}^*$, que la suite $(p_{n,N})_{N \geq 1}$ est croissante et qu'elle est constante à partir du rang $\max(n, 1)$.

Dans toute la suite, on notera p_n la valeur finale de $(p_{n,N})_{N \geq 1}$.

18. Soit $N \in \mathbf{N}^*$. Donner une suite $(a_{n,N})_{n \in \mathbf{N}}$ telle que :

$$\forall z \in D, \quad \frac{1}{1 - z^N} = \sum_{n=0}^{+\infty} a_{n,N} z^n.$$

En déduire, par récurrence, la formule :

$$\forall N \in \mathbf{N}^*, \forall z \in D, \quad \prod_{k=1}^N \frac{1}{1 - z^k} = \sum_{n=0}^{+\infty} p_{n,N} z^n.$$

19. On fixe $\ell \in \mathbf{N}$ et $x \in [0, 1[$. En utilisant le résultat de la question précédente, établir la majoration :

$$\sum_{n=0}^{\ell} p_n x^n \leq P(x). \text{ En déduire le rayon de convergence de la série entière } \sum_{n \geq 0} p_n z^n.$$

20. Soit $z \in D$. En examinant la différence $\sum_{n=0}^{+\infty} p_n z^n - \sum_{n=0}^{+\infty} p_{n,N} z^n$, démontrer que :

$$P(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} p_n z^n.$$

21. Soit $n \in \mathbf{N}$. Montrer que pour tout réel $t > 0$:

$$p_n = \frac{e^{nt} P(e^{-t})}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{-in\theta} \frac{P(e^{-t+i\theta})}{P(e^{-t})} d\theta. \quad (1)$$

Dans le reste du problème, l'objectif est d'utiliser la formule (1) pour obtenir un contrôle assez fin du nombre p_n lorsque n tend vers $+\infty$.

D. Contrôle de P

22. Soient $x \in [0, 1[$ et $\theta \in \mathbf{R}$. En utilisant la fonction L , montrer que :

$$\left| \frac{1-x}{1-xe^{i\theta}} \right| \leq \exp(-(1-\cos(\theta))x).$$

En déduire que pour tout $x \in [0, 1[$ et tout réel θ :

$$\left| \frac{P(xe^{i\theta})}{P(x)} \right| \leq \exp\left(-\frac{1}{1-x} + \operatorname{Re}\left(\frac{1}{1-xe^{i\theta}}\right)\right).$$

23. Soient $x \in [0, 1[$ et $\theta \in \mathbf{R}$. Montrer que :

$$\frac{1}{1-x} - \operatorname{Re}\left(\frac{1}{1-xe^{i\theta}}\right) \geq \frac{x(1-\cos(\theta))}{(1-x)((1-x)^2 + 2x(1-\cos(\theta)))}.$$

En déduire que si $x \geq \frac{1}{2}$, alors :

$$\left| \frac{P(xe^{i\theta})}{P(x)} \right| \leq \exp\left(-\frac{1-\cos(\theta)}{6(1-x)^3}\right) \quad \text{ou que} \quad \left| \frac{P(xe^{i\theta})}{P(x)} \right| \leq \exp\left(-\frac{1}{3(1-x)}\right).$$

Pour ce dernier résultat, on distinguera deux cas selon les valeurs relatives de $x(1-\cos(\theta))$ et $(1-x)^2$.

24. Montrer qu'il existe un réel $\alpha > 0$ tel que :

$$\forall \theta \in [-\pi, \pi], \quad 1 - \cos(\theta) \geq \alpha\theta^2.$$

En déduire qu'il existe trois réels $t_0 > 0, \beta > 0$ et $\gamma > 0$ tels que, pour tout $t \in]0, t_0]$ et tout $\theta \in [-\pi, \pi]$:

$$\left| \frac{P(e^{-t}e^{i\theta})}{P(e^{-t})} \right| \leq e^{-\beta(t^{-3/2}\theta)^2} \quad \text{ou} \quad \left| \frac{P(e^{-t}e^{i\theta})}{P(e^{-t})} \right| \leq e^{-\gamma(t^{-3/2}|\theta|)^{2/3}}.$$

25. En déduire que :

$$\int_{-\pi}^{\pi} e^{-i\frac{\pi^2\theta}{6t^2}} \frac{P(e^{-t}e^{i\theta})}{P(e^{-t})} d\theta = O_{t \rightarrow 0^+}(t^{3/2}).$$

E. Conclusion

26. En prenant $t = \frac{\pi}{\sqrt{6n}}$ dans (1), conclure que :

$$p_n = O_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{\exp\left(\pi\sqrt{\frac{2n}{3}}\right)}{n} \right).$$

Épilogue. Le dernier résultat est très proche de l'optimalité. Par une analyse plus fine de l'intégrale dans la formule (1), on peut en effet établir l'équivalent :

$$p_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{\exp\left(\pi\sqrt{\frac{2n}{3}}\right)}{4\sqrt{3n}},$$

formule découverte par Hardy et Ramanujan en 1918.

FIN DU PROBLÈME