Devoir Surveillé $n°1$
PSI
MATHEMATIQUES
Samedi 14 Septembre 2024
Durée : 2 heures
Niveau E3A/CCINP
(Documents, calculatrice et portables interdits)

Exercice I

Notations :
Soit $n \in \mathbb{N}^*$

- On désigne par $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ l'espace vectoriel des matrices carrées d'ordre n à coefficients réels.
- On désigne par $T_{s,n}$ l'ensemble des matrices triangulaires supérieures d'ordre n.
- On désigne par $\mathscr{S}_n$ l'espace vectoriel des matrices symétriques d'ordre n, c'est-à-dire les matrices $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ telles que $A^T = A$ où A^T désigne la matrice transposée de A.
- On désigne par $\mathscr{A}_n$ l'espace vectoriel des matrices antisymétriques d'ordre n, c'est-à-dire les matrices $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ telles que $A^T = -A$.
- On considère l'application

$$\varphi : \begin{array}{ccc} T_{s,n} & \longrightarrow & \mathscr{A}_n \\ A & \longmapsto & A - A^T \end{array}$$

1. Quelle est la dimension de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$?
2. Montrer que $T_{s,n}$ est un espace vectoriel de dimension finie, dont on donnera une base et la dimension.
3. **Sans utiliser les dimensions de $\mathscr{S}_n$ et $\mathscr{A}_n$**, montrer que $\mathscr{S}_n$ et $\mathscr{A}_n$ sont supplémentaires dans $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$
4. (a) Vérifier qu'on a bien $\forall A \in T_{s,n}, \varphi(A) \in \mathscr{A}_n$
   (b) Montrer que φ est une application linéaire.
   (c) Déterminer son noyau.
   (d) Montrer que φ surjective (**sans avoir à calculer la dimension de $\mathscr{A}_n$).**
5. En déduire la dimension de $\mathscr{A}_n$ et celle de $\mathscr{S}_n$.

Exercice II

- Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On note $\mathbb{R}_n[X]$ l'espace vectoriel des polynômes à coefficients réels et de degrés inférieurs ou égaux à n .
- Dans cet exercice, un polynôme est confondu avec sa fonction polynômiale associée.
- Pour tout $x \in \mathbb{R}$ et pour tout polynôme P , on admet que $\displaystyle\int_y^x P(t)e^t dt$ a une limite finie quand y tend vers $-\infty$. On note cette limite par $\displaystyle\int_{-\infty}^x P(t)e^t dt$.
  Ainsi par exemple , pour $P = 1$, on a $\displaystyle\int_y^x P(t)e^t dt = \int_y^x e^t dt = e^x - e^y$, donc $\displaystyle\int_{-\infty}^x e^t dt = \lim_{y \to -\infty} e^x - e^y = e^x$.
- On définit l'application φ par : $\forall P \in \mathbb{R}_n[X], \varphi(P) = Q$ où $\forall x \in \mathbb{R}, Q(x) = e^{-x} \displaystyle\int_{-\infty}^x P(t)e^t dt$.
- Id désigne l'application identité sur $\mathbb{R}_n[X]$.

1. Montrer que $\displaystyle\int_{-\infty}^x t\, e^t dt = e^x(x-1)$ et $\displaystyle\int_{-\infty}^x t^2\, e^t dt = e^x(x^2 - 2x + 2)$.

2. Démontrer que, pour tout $i \in [0..n]$, $\displaystyle\int_{-\infty}^{x} t^i e^t dt = e^x(x^i + R(x))$ où R est un polynôme de degré inférieur ou égal à $(i-1)$.
3. Montrer que φ est un endomorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$.
4. Dans cette question uniquement, on prend $n = 2$.
   (a) Montrer que la matrice de φ dans la base canonique de $\mathbb{R}_2[X]$ est $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.
   (b) Déterminer une base de $\operatorname{Ker}(\varphi - Id)$.
   (c) Calculer $(A-I)^2, (A-I)^3$.
   (d) On pose $f = \varphi - Id$ et on rappelle que $f^2 = f \circ f$ et $f^3 = f \circ f \circ f$. Justifier que $f^3 = 0$.
   (e) En déduire $\operatorname{Im}(f^2) \subset \operatorname{Ker} f$.
   (f) Justifier qu'il existe $P_0 \in \mathbb{R}_2[X]$ tel que $f^2(P_0) \neq O$.
   (g) Montrer que $P_0 \neq 0$ et que $(P_0, f(P_0), f^2(P_0))$ est une base de $\mathbb{R}_2[X]$. Quelle est la matrice de f dans cette base ? Quelle est la matrice B de φ dans cette base ?
   (h) Montrer que $\mathscr{C}(B) = \{M \in \mathscr{M}_3(\mathbb{R}) / BM = MB\}$ est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension finie dont on donnera une base et la dimension.
5. On revient à n quelconque. Calculer $\det(\varphi)$. Qu'en déduit-on ?