PSI
MATHEMATIQUES

Devoir Surveillé $n°1$
PSI
MATHEMATIQUES
Samedi 14 Septembre 2024
Durée : 2 heures
Niveau Mines/Centrale
(Documents, calculatrice et portables interdits)

Problème I

Notations et objectifs :

- ☐ Soit n un entier, $n \geqslant 2$; on note $E = \mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$ le $\mathbb{R}$-espace vectoriel des matrices carrées d'ordre n à coefficients réels, et $E^* = \mathscr{L}(E, \mathbb{R})$ le $\mathbb{R}$ espace vectoriel des formes linéaires sur E.
  On rappelle que : $\dim(E) = \dim(E^*)$.
  Les éléments de E sont notés $M = (m_{i\,j})$, la matrice élémentaire $E_{i\,j}$ est la matrice de E dont les coefficients sont tous nuls à l'exception de celui qui se trouve sur la i-ème ligne et sur la j-ème colonne, qui vaut 1.
  Lorsque A et B sont des éléments de E, on note $A\,.\,B$ leur produit.
  Si $M \in E$, on note $\mathrm{Vect}(M)$ le sous-espace vectoriel engendré par M
- ☐ L'objectif du problème est de montrer que chaque hyperplan vectoriel de E possède au moins une matrice inversible.
- ☐ Si $M = (m_{i\,j}) \in E$, on note $T(M)$ le réel $\sum\limits_{k=1}^{n} m_{k\,k}$.
  On définit ainsi une application T de E vers $\mathbb{R}$: $M \mapsto T(M)$.
  A chaque matrice U de E, on associe :
  — L'application T_U de E vers $\mathbb{R}$: $M \mapsto T_U(M) = T(U.M)$.
  — L'ensemble $H_U = \{M \in E \quad / \quad T(U.M) = 0\}$.

Partie I : Généralités, exemples.

1. Quelques propriétés.
   (a) Montrer que T est une application linéaire.
   (b) Pour $U \in E$, prouver que l'application T_U est dans E^*.
   (c) Soit $U \in E$; reconnaître $\mathrm{Ker}\, T_U$, et montrer que H_U est un sous espace vectoriel de E.
2. *Dans cette question seulement,* on prend $n = 2$, et on pose $U = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$.
   (a) Écrire les quatre matrices élémentaires $E_{i\,j}$; que peut-on dire de la famille $(E_{11}, E_{12}, E_{21}, E_{22})$ de $E = \mathfrak{M}_2(\mathbb{R})$?
   (b) Montrer que H_U est l'ensemble des matrices de E dont la somme des quatre coefficients vaut 0.
   (c) Trouver une matrice M de E telle que $T(U\,.\,M) \neq 0$, et en déduire la dimension de $\mathrm{Im} T_U$ puis la dimension de H_U.
   (d) Montrer que H_U possède une matrice inversible.
   *La partie **III** propose une généralisation de ce résultat.*

Partie II : Quelques résultats utiles pour la suite

1. Soit $A = (a_{i\,j})$ et $B = (b_{i\,j})$ des éléments de E.

   (a) Montrer que $T(A\,.\,B) = \sum\limits_{i=1}^{n} \sum\limits_{j=1}^{n} a_{i\,j} b_{j\,i}$.

   (b) **En déduire** les identités suivantes :

$$\begin{array}{ll} (I_1) \qquad T({}^tA.B) = \sum\limits_{i=1}^{n} \sum\limits_{j=1}^{n} a_{i\,j} b_{i\,j} \\ (I_2) \qquad T(B.A) = T(A.B) \end{array} .$$

2. Soit U dans E.

   (a) Si U est la matrice nulle, déterminer $\dim H_U$.

   (b) Si U n'est pas la matrice nulle, montrer que l'on peut trouver un couple d'entiers (i_0, j_0) tel que : $T_U(E_{i_0 j_0}) \neq 0$.
   En déduire que H_U est un hyperplan et donner sa dimension .

3. Pour $(i, j) \in \{1, 2, ..., n\}^2$, on note $T_{i\,j} = T_{E_{j\,i}}$.

   (a) Les indices k et l étant fixés, calculer $T_{i\,j}(E_{k\,l})$ en utilisant (I_1).

   (b) En déduire que les n^2 éléments $T_{i\,j}$ de E^* permettent de définir une base de E^*.

4. Montrer que l'application φ de E vers E^* : $U \mapsto \varphi(U) = T_U$ est un isomorphisme d'espaces vectoriels.

5. On considère un hyperplan vectoriel H de E.

   (a) Quelle est sa dimension ?

   (b) Soit A une matrice non nulle de E qui n'appartient pas à H, montrer que : $E = H \oplus \mathrm{Vect}(A)$.

   (c) Construire alors un élément l de E^* tel que $H = \mathrm{Ker}\, l$.

   (d) Prouver l'existence d'un élément U de E tel que $H = H_U$.

Partie III : Le résultat général

Pour $1 \leqslant r \leqslant n$, on note $R_r = \sum\limits_{i=1}^{r} E_{i\,i}$.

1. Soit $P = \begin{pmatrix} 0 & 0 & . & 0 & 1 \\ 1 & . & . & . & 0 \\ . & . & . & . & . \\ 0 & . & . & . & 0 \\ 0 & 0 & . & 1 & 0 \end{pmatrix}$ c'est-à-dire $P = (p_{i\,j})$ avec

$$\begin{cases} p_{i+1\,i} = 1 & 1 \leqslant i \leqslant n-1 \\ p_{1\,n} = 1 & \\ p_{i\,j} = 0 & \text{ailleurs} \end{cases}$$

   (a) Montrer que P est inversible.

   (b) Prouver que P appartient à l'hyperplan H_{R_r}.

2. En déduire que chaque hyperplan vectoriel H de E possède au moins une matrice inversible.
   Indication : Rappeler la caractérisation du rang de U à l'aide de R_r et l'utiliser