classes préparatoires scientifiques Lycée Brizeux

PSI
MATHEMATIQUES

Devoir Surveillé $n°3$
PSI
MATHEMATIQUES
Samedi 23 Novembre 2024
Durée : 4 heures
Niveau E3A/CCINP
(Documents, calculatrice et portables interdits)

Problème 1 : Du déjà vu !

Toutes les questions sont ici indépendantes.

1. Nature de $\displaystyle\sum_{n\geq 2} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$.
2. Montrer la convergence et calculer la somme de : $\displaystyle\sum_{n\geq 2} \ln\left(1+\frac{(-1)^n}{n}\right)$.
3. Donner les éléments propres de :
   (a) $A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & -1 \\ 3 & -2 & 0 \\ -2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$
   (b) $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \\ 2-m & m-2 & m \end{pmatrix}$ où $m \in \mathbb{R}$.
4. (a) Soit $x \in \mathbb{R}$. Montrer que $\displaystyle\int_0^{+\infty} t^{x-1}e^{-t}\ dt$ converge si, et seulement si, $x > 0$.
   Pour tout $x > 0$, on note
   $$\Gamma(x) = \int_0^{+\infty} t^{x-1}e^{-t}\ dt$$
   (b) Montrer que pour tout $x > 0, \Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$ et en déduire que $\forall n \in \mathbb{N}^*, \Gamma(n) = (n-1)!$
   (c) On admet que l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-t^2}\ dt$ converge et qu'elle vaut $\dfrac{\sqrt{\pi}}{2}$.
   Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N} : \Gamma\left(n+\frac{1}{2}\right) = \dfrac{(2n)!}{2^{2n}n!}\sqrt{\pi}$.
   (d) Pour tout $k \in \mathbb{N}^*$ on note $\rho_k = \ln k - \displaystyle\int_{k-\frac{1}{2}}^{k+\frac{1}{2}} \ln t\ dt$. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$
   $$\ln\Gamma(n) = \int_{\frac{1}{2}}^{n-\frac{1}{2}} \ln t dt + \sum_{k=1}^{n-1} \rho_k$$
   On remarquera que pour $n = 1$, par convention, la somme des ρ_k est nulle.
   (e) Montrer que pour tout $k \in \mathbb{N}^*$:
   $$\rho_k = \int_0^{\frac{1}{2}} (2\ln k - \ln(k+t) - \ln(k-t))dt = \int_0^{\frac{1}{2}} -\ln\left(1-\frac{t^2}{k^2}\right) dt$$
   (f) En déduire que $\displaystyle\sum_{k\in\mathbb{N}^*} \rho_k$ converge.

(g) Montrer qu'il existe $c \in \mathbb{R}$ tel que, lorsque $n \to +\infty$:

$$\ln \Gamma(n) = \left(n - \frac{1}{2}\right) \ln n - n + c + o(1)$$

En déduire que lorsque $n \to +\infty$:

$$\Gamma(n) \underset{n \to +\infty}{\sim} e^c n^{n-\frac{1}{2}} e^{-n}$$

(h) Connaissez-vous la valeur de c ?

Problème 2 : La règle de Raabe-Duhamel.

Soit (α_n) et (β_n) deux suites réelles.
On rappelle que :

La relation $\alpha_n = o\left(\frac{1}{n}\right)$ signifie que $\lim\limits_{n \to +\infty} n\alpha_n = 0$.

Lorsque $\alpha_n \underset{n \to +\infty}{\sim} \beta_n$, il existe un rang à partir duquel α_n et β_n ont même signe.

Soit $(u_n)_{n \geq n_0}$ une suite de réels strictement positifs telle qu'il existe un réel λ vérifiant :

$$(\star)\ \forall n \geq n_0,\ \frac{u_{n+1}}{u_n} = 1 - \frac{\lambda}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right)$$

1. Peut-on utiliser la règle de D'Alembert pour étudier la nature de la série $\sum\limits_{n \geq n_0} u_n$?
2. On suppose $\lambda < 0$,
   (a) Justifier qu'il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que : $\forall n \geq N$, $\frac{u_{n+1}}{u_n} - 1 > 0$.
   (b) En déduire $\forall n \geq N, u_n \geq u_N > 0$
   (c) Justifier que $(u_n)_n$ ne converge pas vers 0.
   (d) Quelle est la nature de la série $\sum\limits_{n \geq n_0} u_n$?
3. Soit β un réel quelconque et $v_n = \dfrac{1}{n^\beta}$.
   Montrer que $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} - \dfrac{v_{n+1}}{v_n} = \dfrac{\beta - \lambda}{n} + o\left(\dfrac{1}{n}\right)$.
4. On suppose que $\lambda > 1$. On se propose de démontrer que la série $\sum u_n$ converge.
   On choisit β tel que $\lambda > \beta > 1$.
   (a) Justifier l'existence d'un entier naturel N tel que,
   pour $n \geq N$, on ait $\frac{u_{n+1}}{u_n} \leq \frac{v_{n+1}}{v_n}$.
   (b) Qu'en déduire sur la suite $\left(\frac{u_n}{v_n}\right)_{n \geq N}$? Déterminer alors un réel positif K, indépendant de n, tel que :
   pour $n \geq N$, on ait $u_n \leq K v_n$.
   (c) Prouver que la série $\sum\limits_{n \geq n_0} u_n$ converge.
5. On suppose que $0 \leq \lambda < 1$.
   Démontrer par un raisonnement analogue à celui fait à la question précédente que la série $\sum\limits_{n \geq n_0} u_n$ diverge.
   On choisira β de manière à ce que la série $\sum\limits_{n \geq n_0} v_n$ diverge et que ceci implique la divergence de la série $\sum u_n$.
6. Pour $n \geq 2$, on pose $x_n = \frac{1}{n}$ et $y_n = \frac{1}{n(\ln(n))^2}$.
   (a) Montrer que les deux suites $(x_n)_n$ et $(y_n)_n$ vérifient la relation $(\star)$ avec $\lambda = 1$.
   (b) Quelle est la nature de la série $\sum\limits_{n \geq 1} x_n$?
   (c) Etablir que la série $\sum\limits_{n \geq 2} y_n$ converge.
   (d) Déduire de tout ce qui précède que le cas $\lambda = 1$ est un cas douteux de la règle de Raabe-Duhamel, c'est-à-dire que si on a $(\star)$ avec $\lambda = 1$, on ne peut pas conclure sur la nature de la série.
7. Pour $n \geq 2$, on pose $w_n = \sqrt{(n-1)!} \prod\limits_{k=1}^{n-1} \sin\left(\frac{1}{\sqrt{k}}\right)$.
   Déterminer la nature de la série $\sum\limits_{n \geq 2} w_n$.

Problème 3 :Blocs de Jordan

Soit p un entier naturel supérieur ou égal à 2 . On note $\mathscr{M}_p(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices carrées de taille p à coefficients réels. Pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$, on définit la matrice $J_\lambda \in \mathscr{M}_p(\mathbb{R})$ par :

$$J_\lambda = \begin{pmatrix} \lambda & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 1 & \lambda & \ddots & & \vdots \\ 0 & 1 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & 1 & \lambda \end{pmatrix}$$

Les matrices J_λ, dites « matrices de Jordan », sont particulièrement importantes dans la mesure où on peut montrer que si le polynôme caractéristique d'une matrice est scindé, alors elle est semblable à une matrice diagonale par blocs dont les blocs sont formés de matrices de Jordan.

On se propose de montrer dans un premier temps une propriété d'irréductibilité des blocs de Jordan. Dans un second temps, on étudie les solutions du système différentiel linéaire associé à une matrice de Jordan, en définissant une exponentielle de matrice.

Une matrice $M \in \mathscr{M}_p(\mathbb{R})$ est dite nilpotente s'il existe $k \in \mathbb{N}$, tel que $M^k = 0$. Dans ce cas, le plus petit entier naturel k, tel que $M^k = 0$ est appelé indice de nilpotence de M.

On note $\mathscr{B} = (e_1, \dots, e_p)$ la base canonique de $\mathbb{R}^P$.

On dit qu'un sous-espace vectoriel V de $\mathbb{R}^p$ est stable par un endomorphisme f de $\mathbb{R}^p$ si pour tout $x \in V$, $f(x) \in V$.

Partie I - Irréductibilité de J_λ

Soit $\lambda \in \mathbb{R}$. On note $u_\lambda \in \mathscr{L}(\mathbb{R}^p)$ l'endomorphisme canoniquement associé à J_λ.

1. Calculer $u_0^2(e_j)$ pour tout $j \in [\![1, p]\!]$ et en déduire J_0^2.
   Calculer de même J_0^{p-1} et J_0^p. En déduire que J_0 est nilpotente d'indice p.
2. Justifier que J_λ est un polynôme matriciel de J_0.
3. Montrer que $\mathrm{Sp}(u_\lambda) = \{\lambda\}$ et déterminer le sous-espace propre associé.
4. Soit V un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^p$. Montrer que V est stable par u_λ si, et seulement si, V est stable par u_0.

Soit V un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^p$ stable par u_λ, de dimension $k \in [\![1, p]\!]$. On note v l'endomorphisme induit par u_λ sur V et $\left(\widetilde{e}_1, \dots, \widetilde{e}_k\right)$ une base de V, que l'on complète en une base $\widetilde{B} = \left(\widetilde{e}_1, \dots, \widetilde{e}_p\right)$ de $\mathbb{R}^P$.

5. Quelle est la forme de la matrice de u_λ dans la base $\widetilde{B}$?
6. En déduire que le polynôme caractéristique de v divise le polynôme caractéristique de u_λ,que $\mathrm{Sp}(v) = \{\lambda\}$ et déterminer le sous-espace propre associé. et montrer que $e_p \in V$.
7. Déduire de la question précédente qu'il n'existe pas de décomposition $\mathbb{R}^P = V \oplus W$ où V et W sont des sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^p$ stables par u_λ non réduits à $\{0\}$.

Partie II - Résolution du système linéaire associé

On s'intéresse dans cette partie aux solutions du système différentiel :

$$(S) \quad X' = J_\lambda \, X$$

Une solution de (S) est une fonction :

$$X : \begin{cases} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R}^p \\ t & \mapsto & \begin{pmatrix} x_1(t) \\ \vdots \\ x_p(t) \end{pmatrix} \end{cases}$$

de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ (c'est-à-dire que : $\forall i \in \{1..n\}, t \mapsto x_i(t)$ est $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$) telle que :

pour tout $t \in \mathbb{R},\ X'(t) = J_\lambda\ X(t)$ où $X'(t) = \begin{pmatrix} x_1'(t) \\ \vdots \\ x_p'(t) \end{pmatrix}$

Pour tout $t \in \mathbb{R}$, on définit la matrice carrée de taille p notée $\exp(tJ_\lambda)$ par :

$$\exp(tJ_\lambda) = e^{\lambda t} \sum_{k=0}^{p-1} \frac{t^k}{k!}\ J_0^k$$

8. Montrer que si X_0 est un vecteur propre pour J_λ associé à la valeur propre λ, alors $\widetilde{X} : t \mapsto e^{\lambda t} X_0$ est une solution particulière de (S).
9. Soit une matrice M dépendant d'une variable t : $M(t) = (m_{ij}(t))_{1 \le i \le n, 1 \le j \le n}$. On dit que $M : t \mapsto M(t)$ est dérivable sur $\mathbb{R}$, lorsque $\forall (i,j) \in \{1,...,n\}^2, m_{ij} : t \mapsto m_{ij}(t)$ est dérivable et on définit et note la dérivée de M, M' par : $\forall t \in \mathbb{R}, M'(t) = \left(m'_{ij}(t)\right)_{1 \le i \le n, 1 \le j \le n}$.
   On définit la fonction $\varphi : \begin{cases} \mathbb{R} \to \mathscr{M}_p(\mathbb{R}) \\ t \mapsto \exp(tJ_\lambda) \end{cases}$
   Montrer que φ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et que pour tout $t \in \mathbb{R}, \varphi'(t) = J_\lambda \exp(tJ_\lambda) = \exp(tJ_\lambda)\, J_\lambda$.
10. Justifier que pour tout $t \in \mathbb{R}, \exp(tJ_\lambda) = e^{\lambda t} \displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{t^k}{k!}\ J_0^k$. Montrer que pour tout $t \in \mathbb{R},\ \exp(tJ_\lambda)$ est inversible, d'inverse $\exp(-tJ_\lambda)$.
11. Montrer que $X : t \mapsto X(t)$ est solution de (S) si, et seulement si, $Y : t \mapsto \exp(-tJ_\lambda)\, X(t)$ est constante.*on admettra que si $t \mapsto M(t) \in \mathscr{M}_p(\mathbb{R})$ et $t \mapsto N(t) \in \mathscr{M}_p(\mathbb{R})$ sont dérivables sur $\mathbb{R}$, alors $t \mapsto M(t)N(t)$ est dérivable et sa dérivée est : $t \mapsto M'(t)N(t) + M(t)N'(t)$*
12. En déduire que les solutions de (S) sont exactement les fonctions $X : t \mapsto \exp(tJ_\lambda)\, X_0$ où $X_0 \in \mathbb{R}^p$.

FIN