**Devoir Surveillé $n°3$**
**PSI**
**MATHEMATIQUES**
Samedi 23 Novembre 2024
Durée : 4 heures
**Niveau Mines/Centrale**
( Documents, calculatrice et portables interdits)

# Problème 1 : Du déjà vu

1. Pour $f$ continue de $\mathbb{R}_+$ dans $\mathbb{R}$, on pose $T(f)(x) = \frac{1}{x}\int_0^x f(t)dt$ si $x > 0$ et $T(f)(0) = f(0)$.
   (a) Montrer que $T$ est un endomorphisme de l'espace des fonctions continues sur $\mathbb{R}_+$.
   (b) Est-il surjectif ? Injectif ?
   (c) Donner ses éléments propres.
2. Donner les éléments propres de $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \\ 2-m & m-2 & m \end{pmatrix}$
3. Soit $u$ un endomorphisme d'un espace vectoriel réel de dimension finie $n > 0$. On suppose $u$ nilpotent de nilindice $p$. Soit $M$ une matrice de $u$ dans une base de $E$. On admet qu'elle est semblable à une matrice triangulaire supérieure $T$.
   (a) Déterminer son spectre complexe et son polynôme caractéristique.
   (b) En déduire que $p \leq n$.
   (c) Quels sont les coefficients diagonaux de $T$ ?
   (d) Montrer que : $\forall k \in \mathbb{N}^*, \operatorname{tr}(u^k) = 0$.
4. On considère ici un espace vectoriel euclidien $(E, (-|-))$. Lorsque $a$ désigne un vecteur de $E$, on note
$$\varphi_a : \begin{cases} E & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & (a|x). \end{cases}$$
   (a) Calculer la dimension de $\mathscr{L}(E, \mathbb{R})$ en fonction de celle de $E$. Montrer que $a \mapsto \varphi_a$ définit un isomorphisme de $E$ sur $\mathscr{L}(E, \mathbb{R})$.
   Étant donné $a \in E$ et $x \in E$ on notera désormais $a \otimes x$ l'application de $E$ dans lui même définie par :
$$\forall z \in E,\ (a \otimes x)(z) = (a|z).x$$
   On fixe $x \in E \setminus \{0\}$. Montrer que l'application $a \in E \mapsto a \otimes x$ constitue une bijection de $E$ sur $\{u \in \mathcal{L}(E)\ :\ \operatorname{Im} u \subset \operatorname{Vect}(x)\}$.

# Problème 2

Le but de ce problème est l'étude de deux suites réelles $F = (f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $G = (g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ . Soient $F = (f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $G = (g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ les deux suites réelles définies chacune par leurs deux premiers éléments et la même relation de récurrence ci-dessous :

$$\begin{array}{llllll} F & : & f_0 = 0, & f_1 = 1, & \text{et pour tout entier naturel } n, & f_{n+2} = f_{n+1} + f_n\,; \\ G & : & g_0 = 2, & g_1 = 1, & \text{et pour tout entier naturel } n, & g_{n+2} = g_{n+1} + g_n. \end{array}$$

Soit $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$ l'espace vectoriel des matrices carrées réelles d'ordre 2 ; soient $I$ la matrice unité et $J$ la matrice carrée définies par les relations suivantes :

$$I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}; \quad J = \begin{pmatrix} 0 & \sqrt{5}/2 \\ \sqrt{5}/2 & 0 \end{pmatrix} = \frac{\sqrt{5}}{2} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Pour tout entier naturel $n$, soit $U_n$ la matrice définie par la relation suivante :

$$U_n = f_n J + \frac{1}{2} g_n I.$$

Soient $U$ la matrice $U_1$ ($U = U_1 = J + \frac{1}{2}I$) et $E$ le sous-espace vectoriel de $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$ engendré par les deux matrices $I$ et $J$.

Le but de cette partie est l'étude alternée des deux suites de réels et de la suite des matrices définies ci-dessus .

**Quelques propriétés :**

1. Démontrer que la suite des matrices $(U^n)_{n\in\mathbb{N}}$, où $U^n$ est la matrice $U$ élevée à la puissance $n$ (avec la convention habituelle $U^0 = I$), est à valeurs dans l'espace vectoriel $E$.
2. Établir une relation qui, pour tout entier naturel $n$, lie les matrices $U_{n+2}$, $U_{n+1}$ et $U_n$.
3. Comparer, pour tout entier $p$ compris entre 0 et 2 ($0 \leqslant p \leqslant 2$) les matrices $U_p$ et $U^p$. Démontrer qu'il existe, pour tout entier naturel $n$, une relation simple entre les matrices $U_n$ et $U^n$.
4. Déduire des deux résultats précédents les relations suivantes :

$$\forall\, n \in \mathbb{N}, \quad \det(U_n) = (-1)^n, \quad (g_n)^2 - 5(f_n)^2 = 4(-1)^n.$$

5. Étant donnés deux entiers naturels $p$ et $q$, exprimer les termes $f_{p+q}$ et $g_{p+q}$ des suites $F$ et $G$ en fonction des termes $f_p$, $g_p$, $f_q$ et $g_q$ de ces mêmes suites.
6. Déterminer l'inverse de la matrice $U_n$ en fonction des matrices $I$ et $J$. Exprimer les coefficients des matrices $I$ et $J$ à l'aide des réels $f_n$ et $g_n$.

**Des polynômes annulés par la matrice $U$ :**

Soit, pour tout entier naturel $n$ supérieur ou égal à 2, $P_n(X)$ le polynôme défini par la relation suivante :

$$P_n(X) = X^n - f_n X - f_{n-1}.$$

7. Démontrer que le polynôme $P_n(X)$ est divisible par le polynôme $X^2 - X - 1$.
8. Quel est le polynôme caractéristique de la matrice $U$ ?
9. Calculer la valeur de la matrice $C_n = U^n - f_n U - f_{n-1} I$.

**Divisibilité du polynôme $X^{2n} - g_n X^n + (-1)^n$ par $X^2 - X - 1$ :**

Soit toujours $n$ un entier supérieur ou égal à 2.

10. Déterminer le polynôme caractéristique de la matrice $U_n$. En déduire la relation suivante :

$$U^{2n} - g_n U^n + (-1)^n I = 0.$$

11. Soient $Q$ et $R$ les polynômes obtenus en effectuant la division euclidienne du polynôme $X^{2n} - g_n X^n + (-1)^n$ par le polynôme $X^2 - X - 1$ :

$$X^{2n} - g_n X^n + (-1)^n = (X^2 - X - 1)Q(X) + R(X).$$

Préciser les degrés des polynômes $Q$ et $R$. Démontrer, en utilisant par exemple les résultats de la question précédente, que le polynôme $X^{2n} - g_n X^n + (-1)^n$ est divisible par $X^2 - X - 1$.

# Problème 3

On rappelle le résultat suivant : toute partie $X$ **non vide** de $\mathbb{N}$ possède un plus petit élément noté $\min X$.

**Définitions et notations :** On dira qu'une série à termes réels est semi-convergente si elle converge sans converger absolument.

On dira qu'une suite $(a_n)_{n\in\mathbf{N}}$ à valeurs complexes vérifie la propriété $(P_1)$ si pour toute suite complexe $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ bornée, la série $\sum a_n u_n$ converge.

On dira qu'une suite $(a_n)_{n\in\mathbf{N}}$ à valeurs réelles vérifie la propriété $(P_2)$ si pour toute suite réelle $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$, la convergence de la série $\sum u_n$ entraîne celle de la série $\sum a_n u_n$.

L'objectif du problème est d'étudier, en particulier à l'aide de méthodes algorithmiques, des propriétés et des contre-exemples de la théorie des suites et des séries et de caractériser simplement les suites qui vérifient $(P_1)$ ou $(P_2)$.

**Suites vérifiant $(P_1)$ et $(P_2)$**

1. Montrer qu'une suite complexe $(a_n)_{n\in\mathbf{N}}$ telle que la série $\sum a_n$ converge absolument vérifie $(P_1)$.
2. Soit $(a_n)_{n\in\mathbf{N}}$ une suite réelle telle que la série $\sum |a_{n+1}-a_n|$ converge.
   (a) Prouver que la suite $(a_n)_{n\in\mathbf{N}}$ possède une limite.
   (b) Soit $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ une suite réelle telle que la série $\sum u_n$ converge.
   On note $U_n = u_0 + u_1 + \cdots + u_n$. Prouver, pour tout entier naturel $N$, la relation :
$$\sum_{n=0}^{N} a_n u_n = \sum_{n=0}^{N-1} (a_n - a_{n+1})\, U_n + a_N U_N.$$
   En déduire que la suite $(a_n)_{n\in\mathbf{N}}$ vérifie $(P_2)$.
3. Soit $(a_n)_{n\in\mathbf{N}}$ une suite de nombres complexes telle que la série $\sum |a_n|$ diverge. Construire une suite $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ de nombres complexes de module 1 telle que la série $\sum a_n u_n$ diverge. Caractériser les suites complexes $(a_n)_{n\in\mathbf{N}}$ vérifiant $(P_1)$.
4. Soit $(a_n)_{n\in\mathbf{N}}$ une suite de réels quelconques telle que, pour toute suite $(\varepsilon_n)_{n\in\mathbf{N}}$ de réels tendant vers 0, la série $\sum \varepsilon_n a_n$ converge.
   Prouver que la série $\sum \varepsilon_n |a_n|$ converge.
   *On admet qu'on peut démonter que la série $\sum a_n$ est absolument convergente.*
5. Soit maintenant $(a_n)_{n\in\mathbf{N}}$ une suite de réels telle que, pour toute suite $(x_n)_{n\in\mathbf{N}}$, la convergence de la série $\sum x_n$ entraîne la convergence de la série $\sum a_n x_n$.
   (a) Prouver que la suite $(a_n)_{n\in\mathbf{N}}$ est bornée.
   (b) Soit $(\varepsilon_n)_{n\in\mathbf{N}}$ une suite réelle de limite nulle. Prouver la convergence de la série $\sum \varepsilon_n (a_{n+1}-a_n)$.
   (c) Montrer que $\sum (a_{n+1}-a_n)$ est absolument convergente.
   (d) Caractériser les suites vérifiant $(P_2)$.