Devoir Surveillé $n°4$
PSI
MATHEMATIQUES
Samedi 11 Janvier 2025
Durée : 2 heures
Niveau Mines/Centrale
(Documents, calculatrice et portables interdits)

Exercice I

Soit $(A,B) \in \mathscr{M}_n(\mathbb{C})^2$ qui commutent et toutes les valeurs propres de A sont simples. On note f (resp g) l' endomorphisme de $\mathbb{C}^n$ canoniquement associé à A (resp : B).

1. Soit $\lambda \in \mathrm{Sp}\,(A)$. Quelle est la dimension de $E_\lambda(f)$
2. Soit $\lambda \in \mathrm{Sp}\,(A)$. Justifier l'existence de l'endomorphisme $\tilde{g_\lambda}$ de $E_\lambda(f)$ induit par g.
3. Justifier l'existence d'une valeur propre de $\tilde{g_\lambda}$ et donc de g.
4. En déduire qu'il existe $P \in GL_n(\mathbb{C})$ et deux matrices diagonales D et D' telles que $A = PDP^{-1}$ et $B = PD'P^{-1}$.
5. On note d_i et d'_i les coefficients de D et D' et pour $P \in \mathbb{C}_{n-1}[X]$, on pose $h(P) = (P(d_1), \cdots, P(d_n))$.
   (a) Montrer que h est linéaire et injective.
   (b) En déduire qu'il existe un unique polynôme $L \in \mathbb{C}_{n-1}[X]$ tel que : $\forall i, L(d_i) = d'_i$.
   (c) Proposer une justification de l'existence et l'unicité du polynôme L de la question précédente sans utiliser h.
   (d) En déduire qu'il existe $(a_0, \cdots, a_{n-1}) \in \mathbb{C}^n$ tels que $B = \displaystyle\sum_{i=0}^{n-1} a_i A^i$.
   (e) En déduire le commutant de A , c'est-à-dire $C(A) = \{M \in \mathscr{M}_n(\mathbb{C})/AM = MA\}$. Que peut-on dire sur sa dimension ?
   (f) Montrer que la dimension de $C(A)$ est le degré du polynôme minimal de A.

Exercice II

On définit une suite $(u_n)_n$ de fonctions sur $[0,1]$ par :$\forall x \in [0,1]$, $u_0(x) = 1$ et pour tout $n \geq 0$, $u_{n+1}(x) = 1 + \displaystyle\int_0^x u_n(t - t^2)\,\mathrm{d}t$.

1. Démontrer que pour $x \in [0,1]$, on a $0 \leq |u_{n+1}(x) - u_n(x)| \leq \frac{x^{n+1}}{(n+1)!}$
2. En déduire que $(u_n)_n$ converge simplement vers une fonction u non identiquement nulle
3. Démontrer la convergence uniforme de $(u_n)_n$ sur $[0,1]$
4. Montrer que u est solution de $u'(x) = u(x - x^2)$.

Problème

Pour tout réel *strictement positif* α, on se propose d'étudier la fonction S_α de la variable réelle x définie (sous réserve de convergence) comme somme de la série de fonctions suivante :

$$S_\alpha(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} e^{-xn^\alpha}$$

On étudie dans la partie I le domaine de définition et les premières propriétés de la fonction S_α. Dans la partie II, on approfondit le cas particulier $\alpha = 2$, autrement dit l'étude de la fonction S_2.

Partie I : premières propriétés des fonctions S_α $(\alpha > 0)$.

1. *Étude du cas particulier de la fonction* S_1.
   (a) Étudier la convergence simple et expliciter la somme de la série de fonctions définissant S_1 :

$$S_1(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} e^{-xn}.$$

(b) Préciser la limite et un équivalent de $S_1(x)$ quand x tend vers 0.

(c) Préciser la limite de $S_1(x)$ quand x tend vers $+\infty$, et un équivalent de $S_1(x)-1$ en $+\infty$.

2. *Étude du domaine de définition des fonctions S_α ($\alpha > 0$).*
Etablir que le domaine de définition de la fonction S_α pour $\alpha > 0$ est $]0,+\infty[$

3. *Premières propriétés des fonctions S_α ($\alpha > 0$).*

(a) Pour tout $\varepsilon > 0$, établir la convergence normale de la série de fonctions $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0}\left(x \mapsto e^{-xn^\alpha}\right)$ sur $[\varepsilon,+\infty[$. En déduire la continuité de la fonction S_α sur $]0,+\infty[$ (on explicitera le théorème utilisé).

(b) Comparer $S_\alpha(x)$ et $S_\alpha(y)$ pour $0 < x \leqslant y$ et préciser le sens de variation de la fonction S_α.
En déduire que la fonction S_α admet une limite finie ou infinie en 0 et en $+\infty$.

(c) À l'aide d'un théorème dont on précisera l'énoncé, montrer que : $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} S_\alpha(x) = 1$.

(d) En exploitant l'inégalité $S_\alpha(x) \geqslant \displaystyle\sum_{n=0}^{N} e^{-xn^\alpha}$ (que l'on justifiera) pour tout entier naturel N et pour tout réel $x > 0$, établir, pour tout entier naturel N, que : $\displaystyle\lim_{x\to 0} S_\alpha(x) \geqslant N+1$.
Quelle est la limite de $S_\alpha(x)$ quand x tend vers 0 ?

(e) Déduire de ce qui précède que la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0}\left(x \mapsto e^{-xn^\alpha}\right)$ ne converge pas uniformément sur $]0,+\infty[$.

Partie II : Étude de la fonction S_2.

On étudie dans cette partie la fonction définie par :

$$\forall x > 0, \quad S_2(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} e^{-xn^2}$$

4. *Recherche d'un équivalent de S_2 en 0.*

(a) Établir l'inégalité suivante pour tout entier naturel n et tout réel $x > 0$:

$$e^{-x(n+1)^2} \leqslant \int_n^{n+1} e^{-xt^2}\mathrm{d}t \leqslant e^{-xn^2}.$$

(b) En exploitant l'égalité $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-u^2}\mathrm{d}u = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$, en déduire la double inégalité suivante :

$$\forall x > 0, \quad S_2(x) - 1 \leqslant \frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{x}} \leqslant S_2(x).$$

(c) Retrouver alors $\displaystyle\lim_{x\to 0} S_2(x)$, puis donner un équivalent de $S_2(x)$ quand x tend vers 0.

5. *Recherche d'un équivalent de $S_2 - 1$ en $+\infty$.*

(a) Pour tout réel $x > 0$, établir que :

$$S_2(x) - 1 - e^{-x} \leqslant \sum_{n=2}^{+\infty} e^{-xn}.$$

(b) En calculant cette dernière somme, démontrer que $S_2(x) = 1 + e^{-x} + \underset{x\to+\infty}{o}\left(e^{-x}\right)$.
En déduire un équivalent de $S_2(x) - 1$ quand x tend vers $+\infty$.