classes préparatoires scientifiques Lycée Brizeux

PSI
MATHEMATIQUES — **Feuille d'Exercices** $n°4$
Novembre 2024 — **Éléments propres d'un endomorphisme ou d'une matrice**

Exercice 1. 1. Déterminer le polynôme caractéristique de $A = \begin{pmatrix} 0 & 6 & -1 \\ 6 & 0 & 6 \\ -1 & 6 & 0 \end{pmatrix}$

2. Montrer que 1 est valeur propre de A. En déduire le spectre de A et ses sous espaces propres.

Exercice 2. Éléments propres de :

1. $A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & -1 \\ 3 & -2 & 0 \\ -2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$
2. $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \\ 2-m & m-2 & m \end{pmatrix}$
3. f défini par $f((u_n)_{n\in\mathbb{N}}) = (v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ où $v_0 = u_0$ et $\forall n \geq 1, v_n = \frac{u_{n-1}+u_n}{2}$.
4. f défini par $\forall P \in \mathbb{K}[X], f(P)(X) = (X^2-1)P' - 2XP$
5. $f : M \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R}) \longmapsto \operatorname{tr}(M) I_n$.
6. Soient $n \in \mathbb{N}$ tel que $n \geq 3, a \in \mathbb{R}$, $A = \begin{pmatrix} a & 2 & \cdots & 2 \\ 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & 0 & \vdots \\ 1 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$

Exercice 3. (CCINP 2024 Diane) Soient $a \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}^*$ et f une application linéaire de $\mathbb{R}_n[X]$ qui à P associe $(X-a)P' - P + P(a)$.
Déterminer son noyau, son image et ses éléments propres.

Exercice 4. Déterminer le polynôme caractéristique, sans calcul de déterminant : $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 & 2 \\ 3 & 3 & 3 & 3 \\ 4 & 4 & 4 & 4 \end{pmatrix}$.

Exercice 5. *Matrice compagnon*

1. Soit $(a_0, \cdots, a_n) \in \mathbb{K}^n$. Donner le polynôme caractéristique de :

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & a_0 \\ 1 & \ddots & & \vdots & a_1 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots & \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 & a_{n-2} \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & a_{n-1} \end{pmatrix}$$

2. Montrer que tout polynôme unitaire P est polynôme caractéristique d'une matrice. On appelle cette matrice, la matrice compagnon de P.

Exercice 6. Trouver les matrices de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ qui commutent avec $diag(1, 2, \cdots, n)$ et qui lui sont semblables.

Exercice 7. :(CCINP 2021) Soit $A \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$. On pose $B = \begin{pmatrix} 2A & 3A \\ 5A & 0 \end{pmatrix}$. Exprimer le polynôme caractéristique de B à l'aide de celui de A

Exercice 8. Soit n entier naturel supérieur ou égal à $2, f$, l'application définie par :

$$\forall P \in \mathbb{C}_n[X], f(P) = (X^2 - X)P(1) + (X^2 + X)P(-1)$$

Montrer que f est un endomorphisme de $\mathbb{C}_n[X]$, déterminer le noyau, l'image et les éléments propres de f.

Exercice 9. On considère l'endomorphisme T de $\mathbb{C}[X]$ défini par :

$$\forall P \in \mathbb{C}_n[X], T(P) = (3X + 8)P + (X^2 - 5X)P' - (X^3 - X^2)P''$$

1. Etablir que si P est un vecteur propre de T, alors $deg(P) = 3$.
2. En déduire les éléments propres de T.
3. Montrer que si X a un antécédent P par T, alors $deg(P) \leq 3$.
4. T est-il injectif ? surjectif ?

Exercice 10. Montrer que le spectre d'une matrice A de rang 1 est $\{0, \mathrm{tr}\,(A)\}$.

Exercice 11. (ENSAM , Centrale)
Pour f continue de $\mathbb{R}_+$ dans $\mathbb{R}$, on pose $T(f)(x) = \frac{1}{x}\int_0^x f(t)dt$ si $x > 0$ et $T(f)(0) = f(0)$.

1. Montrer que T est un endomorphisme de l'espace des fonctions continues sur $\mathbb{R}_+$.
2. Est-il surjectif ? Injectif ?
3. Donner ses éléments propres.

Exercice 12. Soit $n \geq 1$ et $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ tels que $AB - BA = A$.

1. Montrer que $\forall k, A^k B - BA^k = kA^k$
2. Montrer que , pour tout $k \geq 0$, si $A^k \neq 0$, A^k est vecteur propre de $u : M \longmapsto MB - BM$.
3. En déduire que A est nilpotente.

Exercice 13.

1. Déterminer sans calcul les valeurs propres de : $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 3 & -3 & 6 \\ 2 & -2 & 4 \end{pmatrix}$.
2. Déterminer les sous espaces propres de A.
3. Montrer que A est semblable à $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$.
4. Résoudre dans $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ l'équation : $M^2 + M = A$.

Exercice 14. Une matrice carrée réelle est dite stochastique lorsque ses coefficients sont positis et que la somme des coefficients de chaque ligne vaut 1.

1. Donner deux exemples de matrices stochastiques d'ordre 2.
2. Montrer qu'une matrice $M \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ est stochastique si et seulement si $M \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$.
3. Montrer que le produit de deux matrices stochastiques est une matrice stochastique.
4. Soit $M \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice stochastique.
   (a) Montrer que 1 est valeur propre de M.
   (b) Montrer que le spectre de M est inclus dans le disque $\{z \in \mathbb{C} / |z| \leq 1\}$.

Exercice 15. (Mines-Télécom 2022) On considère $(A, B) \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})^2$ telles que $\mathrm{tr}\,(A) \neq 0$ et $B \neq 0$.
On pose

$$\begin{array}{cccc} \Psi & \mathscr{M}_n(\mathbb{R}) & \to & \mathscr{M}_n(\mathbb{R}) \\ & M & \mapsto & \mathrm{tr}\,(AM)A + B \end{array}$$

1. On définit $\Phi : M \mapsto \mathrm{tr}\,(AM)$. Montrer que Φ est une forme linéaire non nulle.
2. Montrer que si $M \in \mathrm{Ker}\,(\Phi)$, alors M appartient à un sous espace propre de Ψ.
3. Montrer ensuite que si M est un vecteur propre de Ψ associé à une valeur propre différente de 1 , alors M et B sont liées.
4. Donner toutes les valeurs propres et tous les vecteurs propre de Ψ.