PSI
MATHEMATIQUES **Feuille d'Exercices $n°14$**
Mars 2025 **Isométries vectorielles et Endomorphismes symétriques d'un espace euclidien**

Exercice 1. Soit E un espace euclidien et $u \in E$. Pour $\lambda \in \mathbb{R}$, on considère l'endomorphisme f défini par :

$$f(x) = x - \lambda < x, u > u$$

Déterminer les scalaires λ pour lesquels f est une isométrie vectorielle. Donner alors son déterminant, calculer f^2,$\text{Ker}(f - Id_E)$ montrer que $\text{Ker}(f + Id_E) = (\text{Ker}(f - Id_E))^{\perp}$. Conclusion ?

Exercice 2. On munit $E = \mathbb{R}_n[X]$ du produit scalaire :

$$\forall (P, Q) \in \mathbb{R}_n[X], < P, Q >= \int_{-1}^{1} P(t)Q(t)\,\mathrm{d}t$$

Montrer que l'application $u : P \mapsto (1 - X^2)P'' - 2XP'$ est un endomorphisme autoadjoint de E et que ses valeurs propres sont négatives.

Exercice 3. Soit $A = \begin{pmatrix} 0 & -c & b \\ c & 0 & -a \\ -b & a & 0 \end{pmatrix}$, avec a, b, c réels non tous nuls.

1. Montrer que $I_3 + A$ est inversible. Que dire de $I_3 - A$?
2. Montrer que $(I_3 + A)(I_3 - A)^{-1} \in SO_3(\mathbb{R})$.

Exercice 4. Soit $E = \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ muni du produit scalaire $<,>$: $E^2 \to \mathbb{R}, (A, B) \longmapsto tr({}^tAB)$. On note pour $A \in E$, f_A : $\mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \to \mathcal{M}_n(\mathbb{R}), \mapsto AM$. Donner une CNS pour que f_A soit un endomorphisme orthogonal.

Exercice 5. Soient $n \in \mathbb{N}^*$, $\alpha \in \mathbb{R}^*$, $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ tel que $A \neq 0, A^T = A, A^2 = A$. On note $B = \alpha A + I_n$. Trouver une CNS pour que B soit orthogonal.

Exercice 6. Reconnaître l'endomorphisme représenté par $A = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & 2 & -1 \\ 1 & -2 & -2 \\ -2 & 1 & -2 \end{pmatrix}$ dans une b.o.n.

Exercice 7. : Soit $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ non nulle et telle que $A^2 = A^T$.

1. Déterminer un polynôme annulateur de A.
2. On suppose que A admet 0 comme valeur propre. Montrer que A est orthogonalement semblable à $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Exercice 8. Reconnaître l'endomorphisme f de $\mathbb{R}^n$ représenté dans la base canonique par la matrice M dont les coefficients diagonaux sont $1 - \dfrac{1}{n}$ et tous les autres $-\dfrac{1}{n}$. *On cherchera ses éléments propres*

Exercice 9. Les matrices à diagonale propre sont des matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ dont la diagonale est constituée de ses valeurs propres en respectant les ordres de multiplicité. On note $\mathcal{E}_n$ l'ensemble des matrices à diagonale propre de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

1. Donner des exemples de matrices à diagonale propre.
2. Soit A appartenant à $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ antisymétrique telle que $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

   Est-ce que A est une matrice à diagonale propre ?
3. Soit A appartenant à $\mathcal{E}_n$ antisymétrique.
   (a) Donnez les valeurs propres de A
   (b) Montrez qu'il existe un $p \geq 2$ tel que $A^p = 0$.
   (c) Calculez $(A^TA)^p$ et en remarquant que A^TA est symétrique, montrez que $A = 0$.
4. Déterminer la dimension du sous-espace vectoriel $A_n(\mathbb{R})$ des matrices antisymétriques de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$
5. Soit F un sous-espace de $\mathcal{E}_n$, montrez que $\dim F \leq \dfrac{n(n+1)}{2}$

Exercice 10. D'après Ecole Navale

Soit $(A, B, C, D) \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})^4$. On définit $M = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}$ et $J = \begin{pmatrix} I_n & 0 \\ 0 & -I_n \end{pmatrix}$.

On suppose que ${}^tMJM = J$. Montrer que A et D sont inversibles.

Exercice 11. Soit E euclidien et f endomorphisme de E vérifiant :

$$< u, v >= 0 \Longrightarrow < f(u), f(v) >= 0$$

1. Pour u, v unitaire, calculer $< u+v, u-v >$.
2. Montrer qu'il existe $\alpha \in \mathbb{R}^+$, $\forall x \in E, \|f(x)\| = \alpha\|x\|$.
3. En déduire qu'il existe $g \in O(E)$ telle que $f = \alpha g$.

Exercice 12. (Ecrit E3A) Soient E un plan vectoriel, $\mathcal{B} = (\vec{i}, \vec{j})$ une base de E et $\theta \in]0, \pi[$ fixé.
On considère l'endomorphisme f de E représenté par sa matrice C dans la base $\mathcal{B}$: $C = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 2\cos(\theta) \end{pmatrix}$.
On définit alors sur E une forme bilinéaire symétrique Φ par les relations :

$$\Phi(\vec{i}, \vec{j}) = \Phi(\vec{j}, \vec{i}) = \cos(\theta) \text{ et } \Phi(\vec{i}, \vec{i}) = \Phi(\vec{j}, \vec{j}) = 1.$$

On rappelle qu'une forme bilinéaire sur E est une application de E^2 dans $\mathbb{R}$, linéaire par rapport à chacune des variables.

1. Soient $X = x_1\vec{i} + x_2\vec{j}$ et $Y = y_1\vec{i} + y_2\vec{j}$ deux vecteurs de E. Exprimer $\Phi(X, Y)$ en fonction des réels x_1, x_2, y_1, y_2 et θ.
2. Montrer que Φ est un produit scalaire sur E.
3. Prouver que f est une isométrie pour le produit scalaire Φ.
4. Déterminer un vecteur $\vec{k} \in E$ tel que $(\vec{i}, \vec{k})$ soit une base orthonormée pour Φ et que $\Phi(\vec{j}, \vec{k}) > 0$.
5. Expliciter la matrice de f dans la base $(\vec{i}, \vec{k})$. Préciser la nature de f.
6. Soit $m \in \mathbb{N}^*$. Pour quelles valeurs de $\theta \in]0, \pi[$ a-t-on $f^m = \mathrm{id}_E$?

Exercice 13. (Ecrit CCINP) **Partie II – Matrices de Householder**
II.1 – Un exemple
On définit :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 \\ -2 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix} \in \mathrm{M}_3(\mathbb{R}).$$

1. Calculer A^2. En déduire un polynôme annulateur de A.
2. Déterminer les valeurs propres et les vecteurs propres de A.
3. Montrer que les sous-espaces propres de A sont orthogonaux.
4. Déterminer une matrice $P \in \mathrm{O}_3(\mathbb{R})$ et une matrice diagonale $D \in \mathrm{M}_3(\mathbb{R})$, telles que : $P^T A P = D$.
5. Interpréter géométriquement l'endomorphisme A de $\mathrm{M}_{3,1}(\mathbb{R})$.

II.2 – Matrices de Householder
Soit $V \in \mathrm{M}_{n,1}(\mathbb{R}) \setminus \{0_{\mathrm{M}_{n,1}(\mathbb{R})}\}$. On définit P_V, $Q_V \in \mathrm{M}_n(\mathbb{R})$ par :

$$P_V = \frac{1}{\|V\|^2} V V^T, \quad \text{et :} \quad Q_V = \mathrm{I}_n - 2\frac{1}{\|V\|^2} V V^T. \tag{1}$$

1. Montrer que $\mathrm{im}(P_V) = \mathrm{Vect}(V)$ et que $\mathrm{Ker}\,(P_V) = \mathrm{Vect}(V)^\perp$.
2. Montrer que P_V est la projection orthogonale sur la droite $\mathrm{Vect}(V)$.
   Préciser le rang et la trace de la matrice P_V.
3. Montrer que Q_V est symétrique et orthogonale.
4. Montrer que Q_V est la symétrie orthogonale par rapport à $\mathrm{Vect}(V)^\perp$.

Partie III – Factorisation QR
III.1 – Un résultat préliminaire
Soient $U, V \in \mathrm{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, tels que : $\|U\| = \|V\|$. On note : $D = \mathrm{Vect}(U - V)$.

1. Montrer que $D^\perp$ est l'ensemble des $X \in \mathrm{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, tels que : $\|X - U\| = \|X - V\|$.
2. Donner la décomposition de U sur la somme directe $\mathrm{M}_{n,1}(\mathbb{R}) = D \oplus D^\perp$.
3. On suppose U et V non colinéaires. Calculer $Q_{U-V}U$ où Q_{U-V} est définie en (1).
4. En déduire que pour tous $\tilde{U}$, $\tilde{V} \in \mathrm{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, il existe une matrice orthogonale Q, telle que $Q\tilde{U}$ soit colinéaire à $\tilde{V}$.

III.2 – Factorisation QR

1. Soit $A \in \mathrm{M}_n(\mathbb{R})$. Montrer qu'il existe une matrice orthogonale Q_1, telle que $Q_1 A$ soit de la forme :

$$Q_1 A = \begin{pmatrix} \alpha & * & \cdots & * \\ 0 & & & \\ \vdots & & C_1 & \\ 0 & & & \end{pmatrix} \quad \text{où } \alpha \in \mathbb{R} \text{ et } C_1 \in \mathrm{M}_{n-1}(\mathbb{R}).$$

2. En raisonnant par récurrence sur n, montrer que pour tout $A \in \mathrm{M}_n(\mathbb{R})$, il existe une matrice Q orthogonale, telle que QA soit triangulaire supérieure.

Exercice 14. (Mines 2023)