classes préparatoires scientifiques Lycée Brizeux

PSI
MATHEMATIQUES
Mars 2025

Feuille d'Exercices $n°13$
Espaces Préhilbertiens réels et Espaces euclidiens

1 Applications de l'inégalité de Cauchy-Schwarz

Exercice 1. Soit $(x_1, x_2, \cdots, x_n) \in \mathbb{R}^n$.
Montrer que : $\left(\sum\limits_{i=1}^{n} x_i\right)^2 \leq n\left(\sum\limits_{i=1}^{n} x_i^2\right)$ et étudier le cas de l'égalité.

Exercice 2. Montrer que :

$$\int_2^3 \frac{\sqrt{\ln x}}{(x-1)\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x \leq \frac{\ln 3}{2}$$

Exercice 3. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Prouver que l'ensemble $\left\{\sum\limits_{1\leq i,j\leq n} \frac{x_i}{x_j} / (x_1, \cdots, x_n) \in (\mathbb{R}_+^*)^n\right\}$ admet une borne inférieure m que l'on déterminera.

2 Orthogonalité- Projecteur orthogonal- Distance

Exercice 4. On munit $C([0,1], \mathbb{R})$ du produit scalaire $< f, g >= \frac{1}{2}\int_{-1}^{1} f(t)g(t)\,\mathrm{d}t$.
Pour $i \in \{0, 1, 2, 3\}$, on note $P_i : x \longmapsto x^i$ et $F = \mathrm{vect}(P_0, P_1, P_2)$.

1. Montrer que (P_0, P_1, P_2) n'est pas une b.o.n de F.
2. Déterminer une b.o.n de F.
3. Donner $F^\perp$.
4. Déterminer le projeté orthogonal de P_3 sur F et la distance de P_3 à F.

Exercice 5. (Mines Ponts) Soit E un espace préhilbertien réel et $B = (e_1, e_2, \cdots, e_n)$ une famille de vecteurs unitaires de E.

On suppose que : $\forall x \in E,\ \|x\|^2 = \sum\limits_{k=1}^{n} |< e_k, x >|^2$.

Montrer que B est une base orthonormale de E.

Exercice 6. Soit $E = \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ muni du produit scalaire usuel $<,>$: $E^2 \to \mathbb{R}, (A, B) \longmapsto tr({}^tAB)$. On désigne $\mathscr{S}$ l'espace des matrices symétriques et $\mathscr{A}$ celui des matrices antisymétriques.

1. Vérifier que $\mathscr{S}$ et $\mathscr{A}$ sont supplémentaires orthogonaux dans E.
2. Dans cette question, $n = 3$. Exprimer la distance de $M = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$ à $\mathscr{S}$
3. On revient à n quelconque. Soit H l'espace des matrices de trace nulle. Montrer que H est un sev de E et donner sa dimension. Donner une b.o.n de $H^\perp$.Donner la distance à H de la matrice J dont tous les coefficients valent 1.

3 Extrait de sujets d'écrit

Exercice 7. Polynômes orthogonaux extrait de l'écrit CCINP 2018 PC Dans la suite du problème, pour P et Q éléments de $\mathbb{R}[X]$, on définit :

$$\langle P, Q\rangle = \int_{-1}^{1} P(t)Q(t)dt.$$

L'endomorphisme de $\mathbb{R}[X]$, $\phi(P) = (X^2-1)P'' + 2XP'$.
Pour $n \in \mathbb{N}$, $U_n(X) = (X^2-1)^n$, $L_n = \frac{1}{2^n n!}U_n^{(n)}$.
On utilisera les résultats démontrés dans des parties ultérieures du sujet : $\mathbb{R}_n[X]$ est stable par ϕ, $(L_k)_{0\leq k\leq n}$ est une base de $\mathbb{R}_n[X]$ et $\phi(L_n) = n(n+1)L_n$.

1. Justifier que $\langle \cdot,\cdot\rangle$ est un produit scalaire sur $\mathbb{R}[X]$.

   On note $\|\cdot\|$ la norme associée, qui est donc définie par : $\|f\| = \left(\int_{-1}^{1} f(t)^2 dt\right)^{\frac{1}{2}}$.
2. Justifier que $\langle \cdot,\cdot\rangle$ est un produit scalaire sur $\mathbb{R}[X]$.
3. Etablir que : $\forall (P,Q) \in \mathbb{R}[X]^2,\ \langle \phi(P), Q\rangle = -\int_{-1}^{1}(t^2-1)P'(t)Q'(t)dt$, puis que :

   $$\forall (P,Q) \in \mathbb{R}[X]^2,\ \langle \phi(P), Q\rangle = \langle P, \phi(Q)\rangle.$$
4. Montrer que la famille $(L_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de polynômes de $\mathbb{R}[X]$ est orthogonale pour le produit scalaire $\langle \cdot,\cdot\rangle$. *On pourra utiliser le fait que L_n est vecteur propre de ϕ_n.*
5. Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \forall P \in \mathbb{R}_{n-1}[X],\ \langle P, L_n\rangle = 0$.
6. On admet que $\|L_n\|^2 = \dfrac{2}{2n+1}$. Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $Q_n = \sqrt{\dfrac{2n+1}{2}}L_n$. Que peut-on dire de la famille $(Q_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de polynômes de $\mathbb{R}[X]$ pour le produit scalaire $\langle \cdot,\cdot\rangle$?

Dans la suite de cette partie, P désigne un polynôme de $\mathbb{R}[X]$.
Pour $n \in \mathbb{N}$, on note $d(P, \mathbb{R}_n[X]) = \inf_{Q\in\mathbb{R}_n[X]} \|P-Q\|$ la distance de P au sous-espace vectoriel $\mathbb{R}_n[X]$.

1. Soit $n \in \mathbb{N}$. En utilisant un résultat de votre cours, justifier qu'il existe un unique polynôme T_n de $\mathbb{R}_n[X]$ tel que : $d(P, \mathbb{R}_n[X]) = \|P - T_n\|$, puis justifier l'égalité :

   $$d(P, \mathbb{R}_n[X])^2 = \|P\|^2 - \sum_{k=0}^{n}(c_k(P))^2,\ \text{où } c_k(P) = \langle P, Q_k\rangle.$$
2. Prouver que la série $\sum (c_k(P))^2$ converge et que : $\displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty}(c_k(P))^2 \leq \|P\|^2$.

Exercice 8. (Ecrits Centrale Math 1 PSI 2022-2023)

1. Montrer que $(A,B) \mapsto \operatorname{tr}({}^tAB)$ est un produit scalaire sur $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$.
2. (Centrale 2022) En déduire que si $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ telle que ${}^tAA = 0$, alors $A = 0$.
3. (Centrale 2023) En déduire de 1. que, si une matrice $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ vérifie $\forall M \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R}), \operatorname{tr}(AM) = 0$ alors $A = 0$.

Exercice 9. (Ecrits Centrale Math 2 PSI 2022)

On note E l'ensemble des fonctions f continues de $\mathbb{R}_+^*$ dans $\mathbb{R}$ telles que l'intégrale $\int_0^{+\infty} f^2(t)\frac{\mathrm{e}^{-t}}{t}\,dt$ converge. Pour $\alpha \in \mathbb{R}_+^*$, on note p_α la fonction $\left|\begin{array}{ccc} \mathbb{R}_+^* & \to & \mathbb{R} \\ t & \mapsto & t^\alpha \end{array}\right.$.

1. Montrer que, si f et g sont deux fonctions de E, alors l'intégrale $\int_0^{+\infty} f(t)g(t)\frac{\mathrm{e}^{-t}}{t}\,dt$ est absolument convergente.
2. En déduire que E est un sous-espace vectoriel de l'espace vectoriel $\mathcal{C}\left(-R_+^*, \mathbb{R}\right)$ des fonctions continues sur $\mathbb{R}_+^*$ à valeurs dans $\mathbb{R}$.
   Pour toutes fonctions $f \in E$ et $g \in E$, on pose, $\langle f \mid g\rangle = \int_0^{+\infty} f(t)g(t)\frac{\mathrm{e}^{-t}}{t}\,\mathrm{d}t$.

Ţ Montrer que l'on définit ainsi un produit scalaire sur E.
La norme $\| \cdot \|$ associée à ce produit scalaire est donc définie pour toute fonction $f \in E$ par

$$\|f\| = \left(\int_0^{+\infty} f^2(t) \frac{\mathrm{e}^{-t}}{t} \, \mathrm{d}t \right)^{1/2}$$

3. Montrer que $\lim_{x \to 0} \|k_x\| = 0$. On rappelle que, pour tout $x > 0, k_x(t) = \mathrm{e}^{\min(x,t)} - 1$.

4. Montrer que, pour tout $k \in \mathbb{N}$, $\int_0^{+\infty} t^k \mathrm{e}^{-t} \, \mathrm{d}t = k!$.

5. On rappelle que les fonctions p_α ont été définies dans les notations en tête de sujet. La famille $(p_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est-elle une famille orthogonale de E ?

6. À chaque fonction $f \in E$, on associe la fonction $U(f)$ définie pour tout $x > 0$ par

$$U(f)(x) = \langle k_x \mid f \rangle = \int_0^{+\infty} \left(\mathrm{e}^{\min(x,t)} - 1 \right) f(t) \frac{\mathrm{e}^{-t}}{t} \, \mathrm{d}t$$

À l'aide de l'inégalité de Cauchy-Schwarz, montrer que pour toute fonction $f \in E$,

$$\lim_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} U(f)(x) = 0$$