classes préparatoires scientifiques Lycée Brizeux

PSI
MATHEMATIQUES — **Feuille d'Exercices** $n°15$
Mars 2025 — **Espaces Vectoriels Normés**

Exercice 1. Soit $(n,p) \in \mathbb{N}^2$ et $p+1$ réels $(x_0, x_1, \cdots, x_p)$ distincts deux à deux.

On note $E = \mathbb{R}_n[X]$, et on pose, pour $Q \in E, N(Q) = \sum_{k=0}^{p} |Q(x_k)|$.

Donner une CNS pour que N soit une norme sur E.

Exercice 2. Soit $E = \mathcal{C}^1([0,1], \mathbb{R})$. On note $N(f) = \sqrt{f(0)^2 + \int_0^1 (f'(t))^2 \, \mathrm{d}t}$.

1. Montrer que N est une norme .
2. Montrer que, $\forall f \in E,\ \|f\|_\infty \leq \sqrt{2} N(f)$ *Indication écrire* $f(x) = f(0) + \int_0^x f'(t)dt$.
3. Montrer que les normes ne sont pas équivalentes.

Exercice 3.

1. Montrer que l'application définie par $N(A) = \sqrt{tr({}^tAA)} = \sqrt{\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}^2}$ est une norme sur $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$.
2. Montrer que $N(AB) \leq N(A)N(B)$ pour tous A et B.
3. Caractériser les couples (A,B) pour lesquels : $N(AB) = N(A)N(B)$.
4. Soit N' une autre norme sur $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$. Montrer qu'il existe $c > 0$ tel que :

$$\forall (A,B) \in \mathscr{M}_n(\mathbb{C})^2,\ N'(AB) \leq c\, N'(A)N'(B)$$

Exercice 4. Soit $E = \mathcal{C}^0([0,1], \mathbb{R})$. On pose $N_1(f) = \operatorname*{Sup}_{x\in[0,1]} |f(x)|$ et $N_2(f) = \int_0^1 e^x |f(x)| dx$.

1. Démontrer que N_1 et N_2 sont des normes.
2. Trouver k tel que $\forall f \in E,\ N_2(f) \leq k N_1(f)$.
3. On considère $f_n : f_n(x) = 1 - nx$ si $0 \leq x \leq \frac{1}{n}$ et $f_n(x) = 0$ sinon. Les f_n sont-elles dans E ? Etudier les limites de (f_n) dans (E, N_1) et (E, N_2).
4. Les normes sont-elles équivalentes ?.

Exercice 5. Soient $(u_n)_n$ et $(v_n)_n$ deux suites réelles vérifiant :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \begin{cases} u_{n+1} &= \frac{1}{6}u_n + \frac{1}{3}v_n + \frac{1}{2} \\ v_{n+1} &= \frac{1}{2}u_n + \frac{1}{3}v_n - \frac{1}{3} \end{cases}$$

On posera pour $n \in \mathbb{N}, X_n = \begin{pmatrix} u_n \\ v_n \end{pmatrix}$ et pour $C = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$, $\|C\|_\infty = Max(|a|, |b|)$.

1. Montrer que $\|.\|_\infty$ est une norme sur $\mathscr{M}_{2,1}(\mathbb{R})$.
2. Trouver une matrice carrée A et une matrice colonne B telles que : $\forall n \in \mathbb{N}, X_{n+1} = AX_n + B$.
3. Déterminer l'unique matrice L telle que $L = AL + B$.
4. Montrer que pour toute colonne X, on a $\|AX\|_\infty \leqslant \frac{5}{6}\|X\|_\infty$.
5. Montrer que :$\forall n \in \mathbb{N}, \|X_n - L\|_\infty \leqslant \left(\frac{5}{6}\right)^n \|X_0 - L\|_\infty$
6. En déduire la convergence des suites $(u_n)_n$ et $(v_n)_n$ vers des limites à calculer.

Exercice 6. On note $A = \dfrac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$.

Déterminer $\lim_{n\to+\infty} A^n$.

Exercice 7. On note $A = \begin{pmatrix} 5 & 0 & -1 \\ 1 & 4 & -1 \\ -1 & 0 & 5 \end{pmatrix}$.

1. Montrer que A est diagonalisable sur $\mathbb{R}$ et la diagonaliser.
2. Calculer $\displaystyle\sum_{p=0}^{+\infty} \frac{1}{(2p)!} A^{2p}$.

Exercice 8. Soit $E = \mathbb{R}[X]$.

Pour $P \in E/\{0\}$, en écrivant $P = \sum\limits_{i=0}^{deg(P)} a_i X^i$, on pose $\|P\| = \displaystyle\operatorname*{Sup}_{0 \leq i \leq deg(P)} |a_i|$ et $\|0\| = 0$.

On pose pour $n \in \mathbb{N}^*$, $P_n = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i} X^i$.

1. Montrer que $\|\cdot\|$ est une norme sur E.
2. Calculer $\|P_n\|$. En déduire que la suite $(P_n)_n$ ne converge pas vers 0 au sens de $\|\cdot\|$.
3. Soit $P \in E$ de degré d. Montrer que, pour tout $n \geq d+1$, on a $\|P_n - P\| \geq \dfrac{1}{d+1}$. En déduire que la suite $(P_n)_n$ est divergente au sens de $\|\cdot\|$.