classes préparatoires scientifiques Lycée Brizeux

PSI
MATHEMATIQUES
Septembre 2024

Feuille d'Exercices $n°2$
Intégration sur un intervalle quelconque

1 Applications du cours

Exercice 1. 1. Nature de $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{1-\frac{1}{\sqrt{x}}}\,\mathrm{d}x$.

2. Nature de $\displaystyle\int_0^{+\infty} \ln t e^{-t}\,\mathrm{d}t$.
3. Nature de $\displaystyle\int_4^{+\infty} \frac{\sin(t)}{\sin t+\sqrt{t}}\,\mathrm{d}t$. *faire un développement limité en* $+\infty$
4. Nature de $\displaystyle\int_0^{+\infty} \sin(t^2)\,\mathrm{d}t$.

Exercice 2. Après avoir justifié son existence, calculer :

1. $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\ln(t)}{1+t^2}\,\mathrm{d}t$.*chgt de variable* $u=\frac{1}{t}$
2. $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{1}{(1+t^2)^2}\,\mathrm{d}t$.*Astuce pour le calcul : écrire* $1=1+t^2-t*t$.
3. $\displaystyle\int_0^{+\infty} \ln\left(1+\frac{1}{t^2}\right)\mathrm{d}t$.
4. par récurrence sur $n\in\mathbb{N}$, $I_n=\displaystyle\int_0^1 (\ln(u))^n\,\mathrm{d}u$.
5. $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{2+2t+t^2}$.
6. $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{x^5\ln x}{(1+x^6)^2}\,\mathrm{d}x$.
7. $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\ln(1-\cos x)}{\cos x}\,\mathrm{d}x$.

Exercice 3. (IMT 2021-2019)
Justifier la convergence et calculer $\displaystyle\int_0^{+\infty}\left(1-t\ \arctan\frac{1}{t}\right)\mathrm{d}t$.

Exercice 4. 1. Justifier que $I=\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{1}{t^3+1}\,\mathrm{d}t$ et $J=\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{t}{t^3+1}\,\mathrm{d}t$ existent.

2. Montrer que I=J calculer I+J et en déduire I.

Exercice 5. Donner l'ensemble de définition de $f : x\mapsto \displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{\mathrm{d}t}{t^x(1+t)}$.

Exercice 6. 1. Pour quelles valeurs de x réel peut-on définir $f(x)=\displaystyle\int_1^{+\infty}\frac{t^{-2x}}{1+t^2}\,\mathrm{d}t$?

2. Donner une relation entre $f(x)$ et $f(x+1)$.
3. Calculer $f(0)$. En déduire $f(n)$ pour $n\in\mathbb{N}$.

Exercice 7. 1. Trouver un équivalent de $u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{\ln k}{k}$.

2. Montrer qu'il existe $C \in \mathbb{R}$ tel que $u_n = \frac{1}{2}(\ln n)^2 + C + o(1)$.

3. On admet que $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} = \ln(n) + \gamma + \underset{n\to+\infty}{o}(1)$.

   Montrer que $\sum_{k=1}^{2n} (-1)^k \frac{\ln k}{k} = \sum_{k=1}^{n} \frac{\ln 2}{k} - \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{\ln(k}{k}$.

   En déduire la valeur de $\sum_{k=1}^{+\infty} (-1)^k \frac{\ln k}{k}$.

Exercice 8. 1. Montrer que $g_n : x \mapsto \frac{x^n}{(x^2(1-x))^{1/3}}$ est intégrable sur]0,1[.

2. Donner une formule de récurrence sur $J_n = \int_0^1 g_n(t)dt$.
3. En déduire J_n.

Exercice 9. 1. Prouver que $\int_1^{+\infty} \frac{\cos(t)}{t}\,\mathrm{d}t$ converge.

2. Quelle est la nature de $\int_1^{+\infty} \frac{|\cos(t)|}{t}\,\mathrm{d}t$.

Exercice 10. Etudier l'intégrabilité :

1. sur $]0,1[$ de $f : t \mapsto \frac{1}{(1-t^2)^{\frac{3}{4}}}\,\mathrm{d}t$.
2. sur $]0,+\infty[$ de $f : x \mapsto \frac{2(1-\cos x)}{x^2+x^3}$.
3. sur $\mathbb{R}_*^+$ de $f : x \mapsto \frac{\ln(1+x)}{x\sqrt{x}+x^2}$

2 Exercices plus difficiles

Exercice 11. (CCINP 2016) Trouver $(a,b,c) \in \mathbb{R}^3$ tels que $\frac{2x+1}{x(x+1)^2} = \frac{a}{x} + \frac{b}{x+1} + \frac{c}{(x+1)^2}$.
On admet que $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$. Montrer que $\int_0^1 t\lfloor \frac{1}{t} \rfloor\,\mathrm{d}t$ converge et la calculer.

Exercice 12. 1. Justifier l'existence de $I = \int_0^1 \frac{t-1}{\ln t}\,\mathrm{d}t$.

2. Etablir $I = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-x} - e^{-2x}}{x}\,\mathrm{d}x$.
3. En séparant cette dernière intégrale en deux, observer $I = \lim_{\varepsilon \to 0^+} \int_\varepsilon^{2\varepsilon} \frac{e^{-x}}{x}\,\mathrm{d}x$
4. Donner la valeur de I

Exercice 13. (Mines 2021) Soit $f(x) = \int_x^{+\infty} \frac{e^{-t}}{t}\,\mathrm{d}t$.

1. Montrer que f est définie sur $]0,+\infty[$. Montrer que f est dérivable sur I et déterminer f'.
2. Déterminer un équivalent de f en 0 et $+\infty$.
3. Montrer que $\int_0^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x$ est définie et la calculer.