classes préparatoires scientifiques Lycée Brizeux

PSI
MATHEMATIQUES — **Feuille d'exercices $n°$ 12**
Février 2025 — **Intégrales à paramètre**

Exercice 1. :(extraît E3A 2022).

Soit Soit F la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$F : x \mapsto F(x) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \exp(2x\cos(t))\,\mathrm{d}t.$$

Montrer que F est C^1 sur $\mathbb{R}$

Exercice 2. CCPINP PSI 2021

Soit $f : x \mapsto \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{1}{t^x(1+t)}\,\mathrm{d}t$.

1. Domaine de définition de f ?
2. f est-elle continue sur D_f ?
3. Montrer $x \in D_f \Longrightarrow 1-x \in D_f$ et $f(1-x) = f(x)$.
4. Trouver un équivalent de f en chacune des bornes de D_f.

Exercice 3. :(extraît écrit CCP 2003).

Soit $\varphi(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{1-\cos t}{t^2} e^{-xt} dt$.

1. Montrer que φ est continue sur $\mathbb{R}^+$ et que $\lim\limits_{x\to+\infty} \varphi(x) = 0$.
2. Montrer que φ est C^2 sur $\mathbb{R}_*^+$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} \varphi'(x) = 0$.
3. Calculer $\varphi''(x)$, $\varphi'(x)$. En déduire $\varphi(0)$.
4. En déduire $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t} dt$.

Exercice 4. CCPINP PSI 2021

On pose $f(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{te^{-tx}}{e^t - 1}\,\mathrm{d}t$.

1. Donner l'ensemble de définition de f .
2. Calculez $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$.
3. Calculez $f(x-1) - f(x)$ pour $x > 0$ et en déduire une expression de $f(x)$ sous la forme d'une somme de série.
4. Proposer une autre méthode pour obtenir ce résultat.

Exercice 5. CCINP PSI 2021

Soient $F(x) = \displaystyle\int_0^1 \frac{\ln(1+xt)}{t}\,\mathrm{d}t$ et D son domaine de définition.

1. Montrer $]-1,1[\subset D$.
2. Trouver un développement en série entière de F.
3. Montrer F de classe C^1 sur $[0,1[$.
4. Fournir une expression simple de F' sur $[0,1[$.
5. Proposer une autre méthode pour aboutir à ce résultat.

Exercice 6. (ENSIEE 2012) Soit $f(x) = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-xt}}{\sqrt{1+t}} dt$.

1. Montrer que f est C^1 sur $]0, +\infty[$.
2. Déterminer la limite de f en $+\infty$ et en 0.
3. Donner un équivalent de f en 0.
4. Etablir que f est solution d'une équation différentielle linéaire.

Exercice 7. (Centrale PSI 2024) On considère l'équation différentielle définie sur $\mathbb{R}$ par

$$(E) xy'' + y' + xy = 0$$

1. (a) Déterminer les solutions développables en série entière de (E) sur $\mathbb{R}$.
   (b) Démontrer qu'il existe une unique solution développable en série entière, notée S, telle que $S(0) = -1$.
2. On définit, $\forall x \in \mathbb{R}, G(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \cos(x \sin(t))\, \mathrm{d}t$
   (a) Montrer que G est définie sur $\mathbb{R}$ et de classe C^2 sur sur $\mathbb{R}$
   (b) Montrer que G est solution de (E) sur $\mathbb{R}$.
   (c) Montrer que $G = S$

Exercice 8. (Mines-Ponts 2022)

1. Montrer que :

$$\int_0^1 \ln\left(\frac{1 - e^{-tu}}{t}\right) \mathrm{d}u \underset{t \to 0^+}{\longrightarrow} -1.$$

2. Soit la fonction q qui à tout réel x associe le nombre réel $q(x) = x - \lfloor x \rfloor - \frac{1}{2}$, où $\lfloor x \rfloor$ désigne la partie entière de x.
   Pour $k \in \mathbf{N}^*$ et $t \in \mathbf{R}_+$, on pose :

$$u_k(t) = \int_{k/2}^{(k+1)/2} \frac{tq(u)}{e^{tu} - 1} \mathrm{d}u \quad \text{si } t > 0, \quad \text{et :} \quad u_k(t) = \int_{k/2}^{(k+1)/2} \frac{q(u)}{u} \mathrm{d}u \quad \text{si } t = 0.$$

   Montrer que u_k est continue sur $\mathbf{R}_+$ pour tout $k \in \mathbf{N}^*$.