PSI
MATHEMATIQUES
Novembre 2024

Feuille d'Exercices $n°5$
Polynômes d'endomorphismes ou matriciels

Exercice 1. Soit $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 4 \\ 1 & 0 & -8 \\ 0 & 1 & 5 \end{pmatrix}$

1. Montrer que A n'admet pas de polynôme annulateur non nul de degré inférieur ou égal à 2.
2. Déterminer un polynôme annulateur de A.
3. En déduire que A est inversible et donner A^{-1}.
4. Expliciter l'ensemble des polynômes annulateurs de A.
5. Montrer que $\mathcal{P} = \{P(A)/P \in \mathbb{R}[X]\}$ est un sev de $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$. Justifier qu'il est de dimension finie et en Déterminer une base.

Exercice 2. : On considère l'endomorphisme

$$f : \begin{array}{ccc} \mathscr{M}_2(\mathbb{R}) & \to & \mathscr{M}_2(\mathbb{R}) \\ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} & \longmapsto & \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix} \end{array}$$

1. Donner le polynôme annulateur unitaire de plus petit degré de f.
2. En déduire que f est inversible et donner son inverse.
3. Calculer $f^n, n \in \mathbb{Z}$.
4. $\mathcal{P} = \{P(f)/P \in \mathbb{R}[X]\}$ est un sev de $\mathscr{L}(\mathscr{M}_2(\mathbb{R}))$. Justifier qu'il est de dimension finie et en Déterminer une base.

Exercice 3. : Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ de rang 1.

1. Trouver un polynôme annulateur de degré 2 de A.
2. Déterminer les puissances de A.
3. Que peut-on dire du spectre d'une matrice de rang 1 ?

Exercice 4. (CCINP) Soit $n \geq 1$ et $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$.

1. Démontrer que si ω est une valeur propre complexe de A de multiplicité s, alors $\overline{\omega}$ une valeur propre complexe de A de multiplicité s.
2. On suppose que $A^3 - 3A - 4I_n = 0$. Montrer que A est de déterminant strictement positif.
3. On suppose que $A^4 + A^2 + I_n = 0$. Montrer que n est pair.
4. On suppose que $A^3 + A^2 + A = 0$. Montrer que $\mathrm{tr}\,(A) \in \mathbb{Z}$,$\mathrm{rg}\,(A)$ est pair, $\det(A) = 0$ ou 1.

Exercice 5. : Soit $E = \mathbb{R}[X]$, u l'endomorphisme de E défini par : $\forall P \in E, u(P) = XP$.

1. Pour tout $k \in \mathbb{N}$, préciser $u^k(1)$ (1 étant considéré comme le polynôme X^0).
2. Soit $A = \sum\limits_{k=0}^{n} a_k X^k \in E$. Préciser $A(u)(1)$.
3. En déduire que u n'admet pas de polynôme annulateur non nul.
4. Pourquoi ce résultat peut justifier que E est de dimension infinie ?

Exercice 6. :(CCINP) Soit $A \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.

1. Montrer que le spectre réel de A est non vide.
2. Montrer que $A^2 + A + I_3 \neq 0$.

Exercice 7. : (CCINP).
Soit $P \in \mathbb{R}[X]$ polynôme annulateur d'un endomorphisme u d'un $\mathbb{R}$-e.v. On suppose $P(0) = 0$ et $P'(0) \neq 0$.
Montrer que $E = \ker u \oplus \mathrm{Im} u$.

Exercice 8. : (Mines).

Montrer que, si A et B sont réelles, carrées d'ordre n, et telles qu'il existe $P \in \mathbb{R}[X]$ non constant, vérifiant $P(0) = 1$ et $P(A) = AB$, alors A est inversible et commute avec B.

Exercice 9. (Mines).

Soit$M = \begin{pmatrix} A & C \\ 0 & B \end{pmatrix}$ où $A \in \mathscr{M}_p(\mathbb{R}), B \in \mathscr{M}_q(\mathbb{R})$. Soit P polynôme annulateur de A et Q celui de B.
Montrer que $\begin{pmatrix} 0 & C \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ est nilpotente et en déduire un polynôme annulateur de M.