classes préparatoires scientifiques Lycée Brizeux

PSI
MATHEMATIQUES — **Feuille d'Exercices $n°6$**
Novembre 2024 — **Diagonalisabilité et Trigonalisabilité**

Exercice 1. (Mines Télécom 2023) Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 2 & 4 & -6 \\ 4 & 8 & -12 \end{pmatrix}$

1. Déterminer le rang de A.
2. En déduire sans calcul le polynôme caractéristique.
3. Déterminer les éléments propres de A
4. A est-elle diagonalisable ?

Exercice 2. (Mines Télécom 2023)

1. Diagonaliser $A = \begin{pmatrix} -5 & 3 \\ 6 & -2 \end{pmatrix}$ est diagonalisable.
2. Montrer qu'il existe une matrice B telle que $B^3 = A$
3. Résoudre l'équation
$$\frac{dX(t)}{dt} = AX(t)$$

Exercice 3.
1. Justifier sans calcul que $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$ est diagonalisable.
2. Trouver l'espace $\{M \in \mathscr{M}_2(\mathbb{R}) / AM = MA\}$. Donner une base .

Exercice 4. (CCINP 23) Soit Φ l'application de $\mathbb{R}_3[X]$ dans $\mathbb{R}^4$: $P \mapsto (P(0), P'(0), P(-1), P'(-1))$.

1. Montrer que Φ est linéaire.
2. Déterminer $\operatorname{Ker}\Phi$. L'application est-elle bijective ?
3. Exprimer M , matrice de Φ dans les bases canoniques de $\mathbb{R}_3[X]$ et $\mathbb{R}^4$.
4. (a) Montrer que M est diagonalisable.
   (b) Donner un polynôme annulateur de M .
   (c) M est-elle inversible ? Si oui, donner son inverse.
5. (a) Montrer qu'il existe un unique polynôme Q tel que $\Phi(Q) = (0, 1, 0, 1)$
   (b) Déterminer Q.
   (c) En déduire la valeur de la somme $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k^2$.

Exercice 5. (CCINP PSI 2021) Soit $m \in \mathbb{N}$ et $A_m = \begin{pmatrix} -m-1 & m & 2 \\ -m & 1 & m \\ -2 & m & 3-m \end{pmatrix}$.

1. Pour quelles valeurs de m, A_m est-elle diagonalisable ?
2. Pour quelles valeurs de m, A_m est-elle inversible ?

Exercice 6.

1. Soit $A = \dfrac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$. Montrer que A est la matrice d'un projecteur de $\mathbb{R}^3$.

2. Diagonaliser p.

Exercice 7. (IMT 2021) Soient E un $\mathbb{C}-$e.v de dimension 3, (e_1, e_2, e_3) une base de E. Pour $a \in \mathbb{C}$, soit $f_a \in \mathscr{L}(E)$ tq : $f_a(e_1) = f_a(e_3) = ae_1 + e_2 - ae_3$ et $f_a(e_2) = 0$.

1. Donner une base de l'image et du noyau de f_a.
2. Donner la matrice de f_a dans la base (e_1, e_2, e_3).
3. Déterminer A^2. Qu'en déduire ?
4. Cet endomorphisme est-il diagonalisable ? bijectif ?

Exercice 8. (CCINP 2021)
Soit $M \in \mathscr{M}_3(\mathbb{R})$. telle que $M^4 = 4M^2$ et 2 et-2 sont valeurs propres de M.

1. On suppose M non inversible. Montrez $\mathrm{Sp}\,(M) = \{0, 2, -2\}$.
2. Montrez M diagonalisable.

Exercice 9. (CCINP 2021) Soit $n \geqslant 3$ et $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$définie par $a_{1j} = j$ pour $1 \geqslant j \geqslant n$ et $a_{i1} = i$ pour $1 \geqslant i \geqslant n$ et des 0 ailleurs.

1. Quel est le rang de A ? $\dim \mathrm{Ker}\, A$?
2. A est-elle diagonalisable ? Que dire de la multiplicité de la vp nulle ?
3. Montrez que $\mathrm{Sp}\, A = \{0, \lambda, 1 - \lambda\}$ avec $\lambda > 1$.
4. Donnez un polynôme de degré 3 annulateur de A.

Exercice 10. (Mines Télécom 2023) Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ telle que :

$$\forall i \in [\![1, n]\!],\ \forall j \in [\![1, n]\!], a_{ij} = \left\{ \begin{array}{ccc} 4 & \text{si} & i = j \\ 1 & \text{sinon} & \end{array} \right.$$

Étudier la diagonalisabilité de A et donner ses éléments propres.

Exercice 11.
1. Montrer qu'une matrice de $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ où $n \geq 2$ et de rang 1 est diagonalisable si et seulement si $\mathrm{tr}\,(A) \neq 0$.
2. Montrer qu'une matrice de $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ où $n \geq 2$ et nilpotente est diagonalisable si et seulement si elle est nulle.

Exercice 12. Soient u et v deux endomorphismes d'un $\mathbb{C}$-espace vectoriel E de dimension finie. On suppose que u et v commutent.

1. Démontrer que u et v ont un vecteur propre commun.
2. On suppose maintenant que u et v sont diagonalisables. Démontrer qu'il existe une base de E dans laquelle les matrices de u et v sont simultanément diagonales.

Exercice 13. (Mines Télécom 2023) Soit Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ telle que :

$$\forall i \in [\![1, n]\!],\ \forall j \in [\![1, n]\!], a_{ij} = i\, j^2$$

.

1. Déterminer le rang de A et déterminer ses valeurs propres sans calculer le polynôme caractéristique.
2. En déduire que A est diagonalisable.
3. Déterminer une base de $\mathbb{R}^n$ formée de vecteurs propres de $\mathbb{R}^n$

Exercice 14. (Mines Télécom 2023)Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $A^3 + A^2 + A = 0$. Démontrer que $\mathrm{tr}\,(A) = 0$
.

Exercice 15. (IMT-CCMP 2021) Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{C})$. On définit $\Psi : M \in \mathscr{M}_n(\mathbb{C}) \mapsto \mathrm{tr}\,(A)M + \mathrm{tr}\,(M)A$.

1. Ψ est-il diagonalisable ?
2. Donner le polynôme caractéristique et la trace de Ψ.

Exercice 16. (CCINP 23)Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$. une matrice réelle qui vérifie la relation (1) : $A^3 + 9A = 0$.

1. Montrer que le spectre de A est inclus dans $\{0, 3i, -3i\}$
2. A est-elle diagonalisable dans $\mathscr{M}_n(\mathbb{C})$?
3. A est-elle diagonalisable dans $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$?
4. Montrer que si n est impair, alors A n'est pas inversible.
5. Montrer que si A est une matrice symétrique réelle non nulle, alors elle ne vérifie pas la relation (1) .

Exercice 17. Soient $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ et n un entier tel que $n \geq 2$

Soit $M \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$. On définit : $u : M \mapsto aM + bM^T$.

1. Montrer que u est un endomorphisme de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$.
2. Trouver un polynôme annulateur de u de degré 2
3. En déduire que u est diagonalisable, et déterminer ses éléments propres.
4. Déterminer $\det(u)$ et $\operatorname{tr}(u)$.

Exercice 18.

1. Soient $A, B \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$. Montrez que, si A inversible, alors $\chi_{AB} = \chi_{BA}$. On admet que le résultat reste valable pour A quelconque.
2. Soient f et g deux endomorphismes d'un ev E de dim. finie n. On note E_λ et K_λ les sous-espaces propres de $f \circ g$ et $g \circ f$ associés à λ. Soit λ une vp non nulle de $f \circ g$. Montrez que λ est vp de $g \circ f$ puis $g(E_\lambda) \subset F_\lambda$ et $f(F_\lambda) \subset E_\lambda$. En déduire que F_λ et E_λ ont même dimension.

Exercice 19. (EIVP-ENTPE 2015)
Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$, montrer que si $A^2 + A + I_n = 0$ alors n est pair et si $A^3 + A^2 + A = 0$ alors rg(A) est pair.

Exercice 20. (Centrale PSI 2021)

1. Soit $A \in \mathscr{M}_2(\mathbb{C})$ telle que$\operatorname{tr} A = 0$ et $\operatorname{tr} A^2 \neq 0$. Montrez A diagonalisable.
2. Soient $n \geqslant 2$ et $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{C})$ tq $\operatorname{tr} A^k = 0$ pour tout $k \in \{1, .., n-1\}$ et $\operatorname{tr} A^n \neq 0$. Montrez A admet une vp non nulle puis que A est diagonalisable. *Ind : Notez $\lambda_1, \cdots, \lambda_p$ les vp non nulles distinctes, de multiplicités $n_1, \cdots, n_p$ et considérez une matrice de Vandermonde.*

Exercice 21. (Mines Pont PSI 2021) Soit E un $\mathbb{K}$-ev et $u \in \mathscr{L}(E)$. On suppose qu'il existe $x_0 \in E$ tel que $(x_0, u(x_0), ..., u^{n-1}(x_0))$ soit une base de E.

1. Montrez existence et unicité d'un n-uplet $(p_0, ..., p_{n-1}) \in \mathbb{K}^n$ tels que $u^n(x_0) = p_0 x_0 + p_1 u(x_0) + \; + p_{n-1} u^{n-1}(x_0)$.
2. Montrez $P(X) = X^n - \sum\limits_{k=0}^{n-1} p_k X^k$ annule u. Montrez si Q annule u, alors Q est multiple de P.
3. En déduire C N S pour que u soit diagonalisable.
4. On note $\mathbb{K}[u] = \{Q(u), Q \in \mathbb{K}[X]\}$. Déterminez $\dim \mathbb{K}[u]$
5. Montrez que le Commutant de u est $\mathbb{K}[u]$.

Exercice 22. Soit u un endomorphisme d'un $\mathbb{K}$ espace vectoriel de dimension finie trigonalisable, $(\lambda_1, \cdots, \lambda_p)$ désignant les valeurs propres deux à deux distinctes de u, d'ordres de multipicité respectifs $(m_1, \cdots, m_p)$.

1. Montrer que : pour tout $k \in \mathbb{N}$,

$$\operatorname{Tr}(u^k) = \sum_{i=1}^{p} m_i \lambda_i^k \text{ et } \det(u) = \prod_{i=1}^{p} \lambda_i^{k m_i}$$

2. On suppose que λ_1 désigne la plus grande valeur propre en module, montrer alors que :

$$\lambda_1 = \lim_{k \to +\infty} \frac{\operatorname{Tr}(u^{k+1})}{\operatorname{Tr}(u^k)}$$