PSI
MATHEMATIQUES — **Feuille d'Exercices $n°4$**
Octobre 2024 — **Séries Numériques**

Exercice 1. Donner un équivalent de $\displaystyle\sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{\sqrt{k}}$

Exercice 2. Soit $u_n = \displaystyle\prod_{k=1}^{n} \left(1+\frac{k^2}{n^2}\right)$. Étudier la convergence de $(u_n)_n$.

Exercice 3. Nature de :
(1) $\sum\limits_{n\geqslant 0} \ln\left(\frac{n^2+n+1}{n^2+n-1}\right)$, (2) $\sum\limits_{n\geqslant 1} \left(\frac{n+3}{2n+1}\right)^{\ln n}$, (3) $\sum\limits_{n\geqslant 1} \frac{n^2}{(n-1)!}$, (4) $\sum\limits_{n\geqslant 2} \left(\left(\cos\frac{1}{\sqrt{n}}\right)^n - \frac{1}{\sqrt{e}}\right)$, (5)$\displaystyle\sum_{n\geqslant 0} \frac{(\ln n)^n}{n!}$,
(6)$\displaystyle\sum_{n\geqslant 0} \frac{3\cdot 6\cdot 9\cdots(3n)}{n^n}$

Exercice 4.
1. Convergence et somme de $\displaystyle\sum_{n\geq 2} \frac{1}{n^3-n}$.
2. Existence et somme de $\displaystyle\sum_{n=2}^{+\infty} \ln\left(1-\frac{2}{n(n+1)}\right)$.
3. En vous aidant d'une série exponentielle , montrer l'existence et calculer $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} \frac{\cos(\frac{2n\pi}{3})}{n!}$

Exercice 5. Montrer que :

$$\forall x\in\mathbb{R}, \mathrm{ch}\,(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{2n}}{(2n)!}$$

Exercice 6. Donner la CNS sur $(r,\theta)\in\mathbb{R}^2$ pour que $\displaystyle\sum_{n\geq 0} r^n\cos(n\,\theta)$ et $\displaystyle\sum_{n\geq 0} r^n\sin(n\,\theta)$ convergent puis dans le cas de convergence, calculer la somme.

Exercice 7. (EIVP) Montrer la convergence et calculer la somme de $\displaystyle\sum_{n\geq 0} \mathrm{Arctan}\frac{1}{n^2+3n+3}$ sachant que $n^2+3n+3 = (n+1)(n+2)+1$ et en utilisant $\tan(a-b)$.

Exercice 8. (CCINP)
1. Prouver que, pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, l'équation $ln(x) = x-n$ a une solution unique dans $[1,+\infty[$ notée x_n.
2. Étudier la nature de $(x_n)_n$.
3. Étudier la nature de $\sum x_n^\alpha$ en fonction de α.

Exercice 9. Pour $n\in\mathbb{N}$, on note $R_n = \displaystyle\sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k!}$.
1. Justifier l'existence de R_n.
2. Montrer $(n+1)!R_n \to 1$ quand n tend vers $+\infty$.
3. En déduire la nature de $\sum\limits_{n\geq 0} \sin(n!2\pi e)$.

Exercice 10. (Mines Télécom 2019)
Pour $n \geq 2$, on pose

$$u_n = \prod_{k=2}^{n} \left(2 - 3^{\frac{1}{k}}\right)$$

1. Montrer que $(u_n)_n$ converge.
2. En considérant $\ln(u_n)$, donner la limite de $\ln(u_n)$.
3. Montrer qu'il existe $\alpha > 0$, $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{\alpha}{n^{\ln(3)}}$. *(Indication :Considérer $v_n = n^{\ln(3)}u_n$ et $w_n = \ln(v_{n+1}) - \ln(v_n)$)*

Exercice 11.

1. Trouver un équivalent de $u_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{\ln k}{k}$.
2. Montrer qu'il existe $C \in \mathbb{R}$ tel que $u_n = \frac{1}{2}(\ln n)^2 + C + o(1)$.
3. On rappelle que $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} = \ln(n) + \gamma + o(1)$.

   Montrer que $\displaystyle\sum_{k=1}^{2n} (-1)^k \frac{\ln k}{k} = \sum_{k=1}^{n} \frac{\ln 2}{k} - \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{\ln(k}{k}$.

   En déduire la valeur de $\displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty} (-1)^k \frac{\ln k}{k}$.

Exercice 12. Nature de (1) $\sum\limits_{n\geqslant 2} \frac{1}{n+(-1)^n\sqrt{n}}$,(2) $\sum\limits_{n\geqslant 1} \frac{(-1)^n \ln n}{n-\ln n}$, (3) $\sum\limits_{n\geqslant 1} \frac{(-1)^n}{n+(-1)^n}$,

Exercice 13.

1. Montrer l'existence de $\displaystyle\int_n^{+\infty} \frac{\ln x}{x(1+x)}dx$ pour tout $n \geq 1$.
2. Vérifier que :
$$\int_n^{+\infty} \frac{\ln x}{x(1+x)}dx = \int_n^{+\infty} \frac{\ln x}{x^2}dx - \int_n^{+\infty} \frac{\ln x}{x^2(1+x)}dx = \frac{\ln(n)}{n} + \frac{1}{n} + O\left(\frac{\ln(n)}{n^2}\right)$$
3. En déduire la nature de $\sum\limits_{n\geq 1} (-1)^n n^a \int_n^{+\infty} \frac{\ln x}{x(1+x)}dx$.

Exercice 14. On pose $\forall n \in \mathbb{N}, R_n = \sum\limits_{k=n+1}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{k}$.

1. Justifier l'existence de R_n.
2. Montrer que $R_n + R_{n+1} = 2R_n - \frac{(-1)^n}{n+2}$ et $R_n + R_{n+1} = \sum\limits_{k=n+1}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{k(k+1)}$.
3. Donner un équivalent de R_n.
4. Nature de $\sum\limits_{n\geq 0} R_n$.

Exercice 15. : (CCINP) Pour $n \in \mathbb{N}^*$, On pose $H(n) = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$.

Montrer que

$$e\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n.n!} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{H_n}{n!}$$

Exercice 16.

1. Montrer que la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0} \frac{(-1)^n}{2n+1}$ converge et donner sa somme.
2. Convergence et somme de la série de terme général $u_n = \dfrac{\pi}{4} - \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{2k+1}$.

Exercice 17. Montrer que la série $\sum \frac{(-1)^{n+1}}{n^4}$ converge et déterminer une valeur approchée de sa somme à 10^{-3} près.

Exercice 18. Soit $(u_n)_n$ la suite définie par $u_0 > 0$ et $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = 1 - e^{-u_n}$.

1. Montrer que $\forall x \in \mathbb{R},\ 1 - e^{-x} \leq x$.
2. Montrer que la suite $(u_n)_n$ est bien définie, convergente et déterminer sa limite.
3. Déterminer la nature de la série $\sum (-1)^n u_n$

Exercice 19. (CCINP 2018) Montrer que la série de terme général $w_n = \dfrac{1}{n+1} \displaystyle\sum_{k=n+1}^{+\infty} \dfrac{(-1)^k}{k}$ converge.

Exercice 20.
1. Montrer que $\sum\limits_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \geq \int_1^{n+1} \frac{1}{t}$.
2. Justifier que $\ln(n!) \leq n \ln(n)$.
3. En déduire la nature de la série de terme général $\frac{\sum\limits_{k=1}^{n} \frac{1}{k}}{\ln(n!)}$.

Exercice 21. Montrer que $\left(\frac{(n^2+1)(n!)^2}{(2n)!}\right)$ converge vers 0

— En utilisant la formule de Stirling

— En utilisant la règle de D'Alembert.

Exercice 22. (CCINP) Montrer que la série de terme général $\ln(2n + (-1)^n) - \ln(2n)$ est convergente mais pas absolument.

Exercice 23. (Mines-Ponts)
Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose

$$u_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{\sqrt{k+1}}$$

Justifier l'existence des u_n et étudier la convergence de $\sum u_n$.