PSI
MATHEMATIQUES
Décembre 2024

Feuille d'Exercices $n°7$
Suites et Séries de Fonctions

Exercice 1. On pose $f_n(x) = \dfrac{n+2}{n+1}\mathrm{e}^{-nx^2}\cos(\sqrt{n}x)$.

1. Étudier la convergence simple de la suite de fonctions (f_n).
2. La suite de fonctions (f_n) converge-t-elle uniformément sur $[0,+\infty[$?
3. Soit $a>0$. La suite de fonctions (f_n) converge-t-elle uniformément sur $[a,+\infty[$?
4. La suite de fonctions (f_n) converge-t-elle uniformément sur $]0,+\infty[$?

Exercice 2. Pour tout $x\in\mathbb{R}$, on pose $f_n(x) = \dfrac{\sin(nx)}{1+n^2x^2}$.

1. Étudier la convergence simple de la suite (f_n).
2. Étudier la convergence uniforme de la suite (f_n) sur $[a,+\infty[$ (avec $a>0$), puis sur $]0,+\infty[$.

Exercice 3. On pose : $\forall\, n\in\mathbb{N}^*,\ \forall\, x\in\mathbb{R},\ f_n(x) = \dfrac{(-1)^n\, e^{-nx}}{n}$.

1. Étudier la convergence simple sur $\mathbb{R}$ de la série de fonctions $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} f_n$.
2. Étudier la convergence uniforme sur $[0,+\infty[$ de la série de fonctions $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} f_n$.

Exercice 4. On pose $f_n(x) = \left(x^2+1\right)\dfrac{ne^x+xe^{-x}}{n+x}$.

1. Démontrer que la suite de fonctions (f_n) converge uniformément sur $[0,1]$.
2. Calculer $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\int_0^1 \left(x^2+1\right)\frac{ne^x+xe^{-x}}{n+x}\mathrm{d}x$.

Exercice 5.

1. Montrer que $\sum_{n\geq 1} 2nxe^{-nx^2}$ converge simplement sur $\mathbb{R}^+$ et normalement sur $[a,+\infty[$ où $a>0$. On note $S(x)$ sa somme
2. Soit$I_n = \int_0^x 2nte^{-nt^2}\,\mathrm{d}t$ pour $x>0$
   (a) Calculer $I_n(x)$.
   (b) Calculer $\sum_{n=1}^{+\infty} I_n(x)$. Est-ce une primitive de S ?
   (c) En déduire $S(x)$.

Exercice 6.

1. Donner l'ensemble de définition de $S : x\mapsto \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} n^x e^{-nx}$
2. Montrer que S est continue sur son ensemble de définition.
3. Déterminer la limite de S en $+\infty$

Exercice 7. On définit la suite de fonctions $(f_n)_n$ sur $[0,1]$ par $f_n(x) = \frac{2^n x}{1+2^n nx^2}$.

1. Etudier la convergence simple de $(f_n)_n$.
2. Calculer $I_n = \int_0^1 f_n(t)\,dt$ et $\lim_{n\to+\infty} I_n$. En déduire que la suite $(f_n)_n$ n'est pas uniformément convergente sur $[0,1]$

3. Proposer une démonstration directe de la non cv uniforme de $(f_n)_n$.

Exercice 8. Soit $f : x \longmapsto \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}x^n}{n}$.

1. Donner le domaine de définition de f.
2. Donner le domaine de dérivabilité de f'. Calculer f'.
3. Que peut-on en déduire ?

Exercice 9. On considère la série de fonctions de terme général u_n définie par :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \forall x \in [0,1],\quad u_n(x) = \ln\left(1 + \frac{x}{n}\right) - \frac{x}{n}\ .$$

On pose, lorsque la série converge, $S(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \left[\ \ln\left(1+\frac{x}{n}\right) - \frac{x}{n}\right]$.

1. Démontrer que S est dérivable sur $[0,1]$.
2. Calculer $S'(1)$.

Exercice 10. On considère $S(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{x+n}$

1. Montrer que S est définie sur $]-1,+\infty[$.
2. Monrer que S est C^1 sur I et donner ses variations.
3. Donner un équivalent à S en -1.
4. Donner la limite en -1
5. Limite de S en $+\infty$

Exercice 11. Pour $x \in \mathbb{R}$, on pose $F(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x}{n^2+x^2}$.

1. Montrer que F est bien définie et continue sur $\mathbb{R}$.
2. Par une comparaison série/intégrale, donner un équivalent de F en $+\infty$.

Exercice 12.

1. Donner le Domaine de convergence D de la série de fonctions $u_n(x) = \frac{\ln x}{x^n \ln n}$ définies pour $n \geq 2$.
2. Montrer que $S(x) = \frac{ln(x)}{x^2 ln(2)} + o(\frac{1}{x^2})$
3. Montrer que S est intégrable sur $[1,+\infty[$.

Exercice 13. Pour $n \in \mathbb{N}$, $x \in]0,1[$, on pose $f_n(x) = \frac{x^{2n+1}\ln(x)}{x^2-1}$ et $f(x) = \frac{x\ln(x)}{x^2-1}$.

1. Montrer que f et f_n sont intégrables sur $]0,1[$.
2. On considère $I_n = \int_0^1 f_n(x)ds$. Montrer que $(I_n)_n$ est convergente et déterminer sa limite.
3. Calculer $I_{k+1} - I_k$ et en déduire que $I_n = \frac{1}{4}\sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k^2}$.

Exercice 14. On définit une suite $(u_n)_n$ de fonctions sur $[0,1]$ par : $u_0(x) = 1$ et pour tout $n \geq 0$, $u_{n+1}(x) = 1 + \int_0^x u_n(t-t^2)\,\mathrm{d}t$.

1. Démontrer que pour $x \in [0,1]$, on a $0 \leq |u_{n+1}(x) - u_n(x)| \leq \frac{x^{n+1}}{(n+1)!}$
2. En déduire que $(u_n)_n$ converge simplement vers une fonction u non identiquement nulle

3. Démontrer la convergence uniforme de $(u_n)_n$ sur $[0,1]$
4. Montrer que u est solution de $u'(x) = u(x - x^2)$.

Exercice 15. Déterminer la limite quand $n \to +\infty$ de $\int_0^n (1 - \frac{x}{n})^n \, \mathrm{d}x$.

Exercice 16. (CCINP 2015)

1. Montrer que $\displaystyle\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^n}$ est convergente.
2. Montrer que $I = \int_0^1 t^t \, \mathrm{d}t$ existe.
3. Montrer que $\forall (n,p) \in \mathbb{N}^2, \int_0^1 t^n \ln^p(t) \, \mathrm{d}t$ existe et la calculer.
4. En déduire que $I = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^n}$.

Exercice 17.

1. $f : x \longmapsto \dfrac{\sin(x)}{e^x - 1}$ est-elle intégrable sur $\mathbb{R}^+$.
2. Trouver une suite $(a_n)_n$ de rationnels strictement positifs telle que $\displaystyle\int_0^{+\infty} f(x) \, \mathrm{d}x = \sum_{n=1}^{+\infty} a_n$.

Exercice 18. (Mines 2015)

1. Domaine de définition de $f(x) = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n^2 + x^2}$.
2. Montrer que f est intégrable sur $\mathbb{R}$ et calculer cette intégrale.

Exercice 19. Montrer que $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin(x)}{e^x - 1} dx = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{1 + n^2}$.