TD : Rédiger

La rédaction d'un raisonnement est une démarche cruciale : elle permet d'une part au lecteur de comprendre plus facilement le propos ; d'autre part elle aide la personne qui rédige à structurer ses idées, bref à mieux réfléchir. À travers des exemples, ce TD présente différents types de raisonnements classiques et montre comment les rédiger. Nous en verrons d'autres dans les chapitres qui suivront.

Rédiger est important, présenter correctement son travail l'est également. Il faut respecter les règles de l'orthographe et de la grammaire (en particulier : un phrase doit comporter un verbe). On veillera également, sur les copies, à encadrer les résultats. Enfin, je vous encourage vivement à systématiquement vérifier que vous avez répondu à la question posée avant de passer à la suivante. Il est tellement facile d'oublier une conclusion !

1 Inégalité triangulaire dans $\mathbb{R}$

Exercice
Montrer que, pour tous réels a et b on a : $|a+b| \leq |a| + |b|$

Soit a et b des réels.

1. Donner les définitions de $|a|$, $|b|$ et $|a+b|$.
2. Conclure.

Méthode
Pour faire une démonstration directe :
- on introduit proprement les objets concernés ;
- on raisonne et on n'oublie pas de conclure.

Remarque : l'inégalité triangulaire peut s'interpréter en termes de distance, nous le ferons dans $\mathbb{C}$.

2 Prouver qu'une propriété universelle est fausse

Exercice
Montrer que la proposition : $\forall x \in \mathbb{R},\ x^2 \geq x$ est fausse.

Méthode
Pour prouver qu'une proposition universelle $\forall x \in \ldots,\ P(x)$ est fausse, il faut

3 Irrationnalité de $\sqrt{2}$

Exercice
Montrer que $\sqrt{2}$ n'appartient pas à $\mathbb{Q}$.

1. Que signifie « $\sqrt{2}$ n'appartient pas à $\mathbb{Q}$ » ?

2. Supposons le contraire, c'est-à-dire :

   En ajoutant la condition que la fraction est irréductible.
3. Montrer que p^2 est pair, puis que p est pair.
4. Montrer que q est pair.
5. En déduire une contradiction et conclure.

Méthode
Raisonner par l'aburde pour prouver une propriété P :
1. on suppose que $\neg P$ est vraie ;
2. on raisonne jusqu'à arriver à une absurdité ;
3. on déduit que $\neg P$ est fausse et donc que P est vraie.

4 Multiple de 3 ?

Exercice
Montrer que, pour tout entier naturel n, $4^n - 1$ est multiple de 3.

1. Que signifie « pour tout entier naturel n, $4^n - 1$ est multiple de 3 » ?
2. À l'aide d'un raisonnement par récurrence, répondre à la question posée.

Remarque : Avez-vous d'autres idées pour résoudre cet exercice ?

Méthode
Raisonner par récurrence pour prouver qu'une propriété $P(n)$ est vraie pour tout entier n supérieur ou égal à un certain entier n_0 (souvent 0 ou 1) :
1. on teste $P(n_0)$, c'est l'**initialisation** ;
2. on prend un entier n quelconque et on suppose que $P(n)$ est vraie. Sous cette hypothèse (dite « de récurrence ») on montre que $P(n+1)$ est vraie. Cette étape est l'**hérédité**.
3. On déduit que $P(n)$ est vraie pour tout entier n supérieur ou égal à n_0, c'est la **conclusion**.

Remarque : toute démonstration par récurrence doit **clairement** faire apparaître les trois étapes.