Déroulement d'une colle :

• Au début de colle, une question de cours sera systématiquement posée : **Tout énoncé de proposition ou définition doit être particulièrement PRÉCIS.**

Ce sera soit une définition, soit propriété soulignée, ou une formule encadrée dont les hypothèses précises permettant de l'utiliser doivent être connues.

Quelques **[preuves]** signalées en crochet gras colorié sont exigibles de tous les étudiants.

Quelques **[preuves⋆]** signalées en crochet gras colorié sont exigibles des étudiants qui ont une compréhension du cours plus avancée.

• Vous passez ensuite aux exercices.

Révisions d'analyse de PCSI

Conséquences pratiques du théorème fondamental :

pour f continue et F primitive, $\displaystyle\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t = F(b) - F(a)$

pour $f : I \to \mathbb{R}$ continue et $x_0 \in I$, $F : x \mapsto \displaystyle\int_{x_0}^x f(t)\,\mathrm{d}t$ est la primitive de f qui vaut 0 en x_0.

Fonction usuelles $\mathrm{ch}, \mathrm{sh}, \cos, \sin, \tan, \arctan$: dérivées, graphes

Notion de prolongement par continuité.

Calcul d'intégrale faisant intervenir les techniques vues en première année (intégration par parties, changement de variable pour l'intégrale d'une fonction continue sur un segment, utilisation de décomposition en éléments simples).

ch. I : Intégration

— rappels : intégrale d'une fonction continue sur un segment et sommes de Riemann :
$\boxed{\displaystyle\int_a^b f(t)\mathrm{d}t = \lim_{N\to+\infty} \sum_{k=0}^{N-1} \frac{b-a}{N} f\left(a + \frac{k}{N}(b-a)\right)}$

— **théorème fondamental du calcul intégral** :
Si $f \in \mathcal{C}^1(I, \mathbb{R})$, alors pour tout $(a, x) \in I^2$, $\boxed{f(x) - f(a) = \displaystyle\int_a^x f'(t)\mathrm{d}t}$

— Fonctions continues par morceaux, notation $\mathcal{CM}(I, \mathbb{K})$, généralisation de la notion d'intégrale sur un segment à ces fonctions.

— Définition de la **nature d'une intégrale généralisée** d'une fonction continue par morceaux sur un intervalle réel de la forme $[a, +\infty[$.

— Nature des intégrales généralisées (ou impropres) usuelles : $\boxed{\displaystyle\int_1^{+\infty} t^{-\alpha}\mathrm{d}t \text{ CV ssi } \alpha > 1}$, , $\boxed{\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-\beta t}\mathrm{d}t \text{ CV ssi } \beta > 0}$, **[preuves]**

— **Critère (C.N.S.) de convergence pour une fonction positive** sur $[a, +\infty[$ (et continue ou continue par morceaux) :
$\displaystyle\int_a^{+\infty} f(t)\mathrm{d}t$ CV ssi $x \longmapsto \displaystyle\int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$ est bornée indépendemment de $x > a$. **[preuve ⋆]** dans le cas continu.

— Définition de la nature d'une intégrale généralisée d'une fonction continue sur un intervalle quelconque.

— Nature des intégrales généralisées (ou impropres) usuelles : $\boxed{\displaystyle\int_0^1 t^{-\gamma}\mathrm{d}t \text{ CV ssi } \gamma < 1}$, , $\boxed{\displaystyle\int_0^1 \ln t\mathrm{d}t = -1}$, **[preuves]**

— Intégrale absolument convergente

— **Définition (à connaître) : intégrabilité d'une fonction continue par morceaux** sur un intervalle réel quelconque.

— Propriété : Si f est intégrable sur I, alors l'intégrale généralisée $\displaystyle\int_{\inf(I)}^{\sup(I)} f(t)\mathrm{d}t$ converge,

— intégrabilité au voisinage d'une borne.

— **Théorèmes de comparaison** en une borne, pour prouver l'intégrabilité (au voisinage d'une borne impropre) par majoration du module, ou équivalent ou domination.

N.B. pour les colleurs : la notation L^1 n'ont pas encore été abordées, ni les CDV ou IPP généralisées

Liste (en construction) **[préparation avancée ⋆]** :

Ollie, Leïna, Gwendal, Erell, (à étoffer)